ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ากับจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม และจำนวนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกับจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม

The Relation Between Number of Equilateral Triangle and Triangular Numbers and Number of Rectangle and Square Numbers

อนุสรณ์ จิตมนัส[1*] วลิษา อินทรภักดิ์[1] และ ณัฏฐิณีย์ คงนวล[1]

[1]คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครศรีธรรมราช จังหวัดนครศรีธรรมราช 80280

[*]Corresponding Author, E-mail: anusornjmn@yahoo.co.th

บทคัดย่อ

จำนวนเชิงรูปเป็นจำนวนเต็มที่สามารถแทนด้วยรูปเรขาคณิต ที่แต่ละจุดในด้านเดียวกันมีระยะห่างเท่ากันซึ่งจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมและจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมเป็นจำนวนเชิงรูปชนิดหนึ่งจึงสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ากับจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมและความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกับจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมได้ และสร้างเป็นทฤษฎีบทและบทแทรกได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $Q(T_n)$ แทนจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้าน 1 หน่วยที่เกิดจากจำนวนสามเหลี่ยม T_n จะได้ว่า $Q(T_n)=(n-1)^2$

ทฤษฎีบทที่ 2 กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $R(T_n)$ แทนจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมดที่เกิดจากจำนวนสามเหลี่ยม T_n จะได้ว่า $R(T_n)=\begin{cases}0 & ;\ n=1\\ 1 & ;\ n=2\\ \dfrac{n^3-3n^2+8n-9}{3} & ;\ n\geq 3\end{cases}$

ทฤษฎีบทที่ 3 กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $U(S_n)$ แทนจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1 ตารางหน่วยที่เกิดจากจำนวนสี่เหลี่ยม S_n จะได้ว่า $U(S_n)=(n-1)^2$

ทฤษฎีบทที่ 4 กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $V(S_n)$ แทนจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทุกขนาด ที่เกิดจากจำนวนสี่เหลี่ยม S_n จะได้ว่า $V(S_n)=\dfrac{2n^3-3n^2+n}{6}$

ทฤษฎีบทที่ 5 กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $W(S_n)$ แทนจำนวนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทุกขนาด ที่เกิดจากจำนวนสี่เหลี่ยม S_n จะได้ว่า $W(S_n)=\dfrac{3n^4-10n^3+9n^2-2n}{12}$

บทแทรก กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ โดยที่ $Z(S_n)$ แทนจำนวนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทุกขนาด ที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม S_n และ $V(S_n)$ แทนจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทุกขนาด ที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม S_n และ $W(S_n)$ แทนจำนวนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทุกขนาดที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม S_n จะได้ว่า $Z(S_n)=V(S_n)+W(S_n)=\left[\dfrac{n(n-1)}{2}\right]^2$

ABSTRACT

Figurate numbers are integer numbers that can be represented by geometric figure which each point in the same side have the same distance. Triangular numbers and square numbers are figurate numbers, so we can find the relation between the numbers of equilateral triangle with triangular figurate numbers and the relation between the numbers of rectangle with square numbers. We obtain the following theorems and corollary.

Theorem 1 Let n be a positive integer and $Q(T_n)$ be the number of equilateral triangle which is all side are 1 unit that generated by T_n. Then $Q(T_n)=(n-1)^2$.

Theorem 2 Let n be a positive integer and $R(T_n)$ be the number of every equilateral triangle that generated by T_n. Then $R(T_n)=\begin{cases} 0 & ;\quad n=1, \\ 1 & ;\quad n=2, \\ \dfrac{n^3-3n^2+8n-9}{3} & ;\quad n\geq 3. \end{cases}$

Theorem 3 Let n be a positive integer and $U(S_n)$ be the number of unit square that generated by S_n. Then $U(S_n)=(n-1)^2$.

Theorem 4 Let n be a positive integer and $V(S_n)$ be the number of all square that generated by S_n. Then $V(S_n)=\dfrac{2n^3-3n^2+n}{6}$.

Theorem 5 Let n be a positive integer and $W(S_n)$ be the number of all rectangle that generated by S_n. Then $W(S_n)=\dfrac{3n^4-10n^3+9n^2-2n}{12}$.

Corollary Let n be a positive integer, $Z(S_n)$ be the number of all rectangle that generate by S_n, $V(S_n)$ be the number of all square that generated by S_n and $W(S_n)$ be the number of all rectangle that generated by S_n. Then $Z(S_n)=V(S_n)+W(S_n)=\left[\dfrac{n(n-1)}{2}\right]^2$.

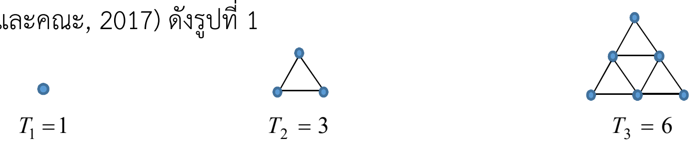
คำสำคัญ: จำนวนเชิงรูป จำนวนเชิงรูปหลายเหลี่ยม จำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม จำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม

Keywords: Figurate number, Polygonal number, Triangular number, Square number

บทนำ

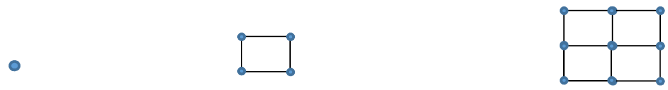
จำนวนเชิงรูป (Figurate numbers) หรือ จำนวนเชิงรูปหลายเหลี่ยม (Polygonal numbers) คือ จำนวนเต็มที่สามารถแทนด้วยรูปเรขาคณิต ที่แต่ละจุดในด้านเดียวกันมีระยะห่างเท่ากัน โดยจำนวนแรกคือ 1 หรือจุดหนึ่งจุดนั่นเอง และจำนวนที่สองคือจำนวนจุดยอดมุมของรูปหลายเหลี่ยม เช่น จำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม จำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม เป็นต้น (นฤพนธ์, 2556)

จำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม (Triangular numbers) คือ จำนวนเต็มบวกที่สามารถเขียนอยู่ในรูปผลบวกของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรก ซึ่ง $T_n=1+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมเขียนเป็นลำดับได้ดังนี้ 1, 3, 6, 10, ... (สมพงค์และคณะ, 2017) ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 จำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม T_1, T_2 และ T_3

จำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม (Square numbers) คือ จำนวนเต็มบวกที่สามารถเขียนอยู่ในรูปกำลังสองของจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $S_n = n^2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมเขียนเป็นลำดับได้ดังนี้ $1, 4, 9, 16, \ldots$ (นฤพนธ์, 2556; Betancourt, 2009) ดังรูปที่ 2



$S_1 = 1$ $S_2 = 4$ $S_3 = 9$

รูปที่ 2 จำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม S_1, S_2 และ S_3

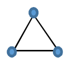
ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ากับจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม

การหาความสัมพันธ์ของจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมพิจารณาจากการนำจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมมากำหนดเป็นจำนวนจุด และสร้างสามเหลี่ยมด้านเท่าที่เกิดจากจุดดังกล่าวดังนี้

T_1 มี 1 จุด ได้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 0 รูป ดังรูปที่ 3

รูปที่ 3 จำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม $T_1 = 1$

T_2 มี 3 จุด ได้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 1 รูป ดังรูปที่ 4

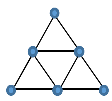


รูปที่ 4 จำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม $T_2 = 3$

T_3 มี 6 จุด ได้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 5 รูป ประกอบด้วย

รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้าน 1 หน่วย จำนวน 4 รูป

รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้าน 2 หน่วย จำนวน 1 รูป ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 จำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม $T_3 = 6$

เมื่อพิจารณาจำนวนจุดและจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้าน 1 หน่วย (วุฒิชัย, 2554) ที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมสรุปได้ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 จำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้าน 1 หน่วยของจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม

i	**จำนวนจุด** T_i	**จำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้าน 1 หน่วย** $Q(T_n)$	**รูปแบบความสัมพันธ์**
1	$T_1 = 1$	0	$Q(T_1) = 0$
2	$T_2 = 3$	$1 = 0 + 1$	$Q(T_2) = Q(T_1) + a_1$
3	$T_3 = 6$	$4 = 1 + 3$	$Q(T_3) = Q(T_2) + a_2$
4	$T_4 = 10$	$9 = 4 + 5$	$Q(T_4) = Q(T_3) + a_3$
5	$T_5 = 25$	$16 = 9 + 7$	$Q(T_5) = Q(T_4) + a_4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$T_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2}$	$Q(T_{n-1}) = Q(T_{n-2}) + (2(n-2)-1)$	$Q(T_{n-1}) = Q(T_{n-2}) + a_{n-2}$
n	$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$	$Q(T_n) = Q(T_{n-1}) + (2(n-1)-1)$ หรือ $Q(T_n) = (n-1)^2$	$Q(T_n) = Q(T_{n-1}) + a_{n-1}$

จากตารางพบว่า $a_{n-2} = 2(n-2)-1$ และ $a_{n-1} = 2(n-1)-1$ พิจารณาได้จากความสัมพันธ์ของลำดับ $a_1, a_2, a_3, a_4, ...$ คือ $1, 3, 5, 7, ...$ ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์ทั่วไปคือ $a_n = 2n-1$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้าน 1 หน่วยและจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม T_n

ทฤษฎีบทที่ 1 กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $Q(T_n)$ แทนจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้าน 1 หน่วยที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม T_n จะได้ว่า $Q(T_n) = (n-1)^2$

บทพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $Q(T_n) = (n-1)^2$

(1) เมื่อ $n = 1$ จะได้ $P(1)$ คือ $Q(T_1) = (1-1)^2 = 0$ ซึ่งเป็นจริง

(2) ให้ k แทนจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ $Q(T_k) = (k-1)^2$ เป็นจริง

(3) จะต้องพิสูจน์ว่า $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย

จากตารางที่ 1 ได้ว่า $Q(T_n) = Q(T_{n-1}) + \big(2(n-1)-1\big)$

เนื่องจาก $Q(T_k) = (k-1)^2$

ได้ว่า $Q(T_k) + (2k-1) = (k-1)^2 + \big(2k-1\big)$

นั่นคือ $Q(T_{k+1}) = k^2$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n $\square$

เมื่อพิจารณาจำนวนจุดและจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมด(วุฒิชัย, 2554) ที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมสรุปได้ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 จำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมดของจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม

i	**จำนวนจุด** T_i	**จำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมดที่เกิดจาก** $R(T_n)$	**รูปแบบความสัมพันธ์**
1	$T_1 = 1$	0	$R(T_1) = 1$
2	$T_2 = 3$	$1 = 0+1$	$R(T_2) = R(T_1) + a_0$
3	$T_3 = 6$	$5 = 1+4$	$R(T_3) = R(T_2) + a_1$
4	$T_4 = 10$	$13 = 5+8$	$R(T_4) = R(T_3) + a_2$
5	$T_5 = 15$	$27 = 13+14$	$R(T_5) = R(T_4) + a_3$
6	$T_6 = 21$	$49 = 27+22$	$R(T_6) = R(T_5) + a_4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$T_{n-1} = \dfrac{(n-1)n}{2}$	$R(T_{n-1}) = R(T_{n-2}) + (n-3)^2 + (n-3) + 2$	$R(T_{n-1}) = R(T_{n-2}) + a_{n-3}$
n	$T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	$R(T_n) = R(T_{n-1}) + (n-2)^2 + (n-2) + 2$ หรือ $R(T_n) = \dfrac{n^3 - 3n^2 + 8n - 9}{3}$	$R(T_n) = R(T_{n-1}) + a_{n-2}$

จากตารางที่ 2 พบว่า $a_{n-3} = (n-3)^2 + (n-3) + 2$ และ $a_{n-2} = (n-2)^2 + (n-2) + 2$ พิจารณาได้จากความสัมพันธ์ของลำดับ $a_1, a_2, a_3, a_4, ...$ คือ $4, 8, 14, 22, ...$ ซึ่งเป็นลำดับพหุนามที่มีพจน์ทั่วไปคือ $a_n = n^2 + n + 2$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมดและจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม T_n

ทฤษฎีบทที่ 2 กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $R(T_n)$ แทนจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมดที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยม T_n จะได้ว่า $R(T_n)=\begin{cases}0 & ;\ n=1\\ 1 & ;\ n=2\\ \dfrac{n^3-3n^2+8n-9}{3} & ;\ n\geq 3\end{cases}$

บทพิสูจน์ กรณี $n=1$ และ $n=2$ ได้ว่า $R(T_n)$ เป็นจริง จากรูปที่ 3 และรูปที่ 4

กรณี $n\geq 3$ พิสูจน์โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $R(T_n)=\dfrac{n^3-3n^2+8n-9}{3}$

(1) เมื่อ $n=3$ จะได้ $P(3)$ คือ $R(T_3)=\dfrac{3^3-3(3^2)+8(3)-9}{3}=5$ ซึ่งเป็นจริง

(2) ให้ k แทนจำนวนเต็มบวกใด ๆ ซึ่ง $k\geq 3$ และ สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ $R(T_k)=\dfrac{k^3-3k^2+8k-9}{3}$ เป็นจริง

(3) จะต้องพิสูจน์ว่า $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย

นั่นคือต้องพิสูจน์ว่า $R(T_{k+1})=\dfrac{(k+1)^3-3(k+1)^2+8(k+1)-9}{3}$

จากตารางที่ 2 ได้ว่า $R(T_n)=R(T_{n-1})+(n-2)^2+(n-2)+2$

เนื่องจาก $R(T_k)=\dfrac{k^3-3k^2+8k-9}{3}$

ได้ว่า $R(T_k)+(k-1)^2+(k-1)+2=\dfrac{k^3-3k^2+k-9}{3}+(k-1)^2+(k-1)+2$

ดังนั้น
$$R(T_{k+1}) =\frac{k^3-3k^2+k-9}{3}+(k-1)^2+(k-1)+2$$
$$=\frac{(k+1)^3-3(k+1)^2+(k+1)-9}{3}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n\geq 3$ □

ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกับจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม

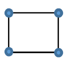
การหาความสัมพันธ์ของจำนวนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม

พิจารณา

S_1 มี 1 จุด ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 0 รูป เนื่องจากมีแค่จุดเดียวไม่สามารถสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมได้ ดังรูปที่ 6

รูปที่ 6 จำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม $S_1=1$

S_2 มี 4 จุด ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 รูป คือ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 1 ตารางหน่วย ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7 จำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม $S_2=4$

S_3 มี 9 จุด ได้มีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 9 รูป ประกอบด้วย

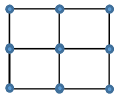
จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1 ตารางหน่วย มี $2^2=4$ รูป

จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 2 ตารางหน่วย มี $1^2=1$ รูป

จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมด $4+1=5$ รูป

จำนวนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 2 ตารางหน่วย มี 4 รูป

ดังรูปที่ 8



รูปที่ 8 จำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม $S_3 = 9$

เมื่อพิจารณาจำนวนจุดและจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1 ตารางหน่วย ที่เกิดจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมสรุปได้ดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีขนาด 1 ตารางหน่วย ของจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม

i	จำนวนจุด S_i	จำนวนรูปสี่เหลียมจัตุรัสขนาด 1 ตารางหน่วย $U(S_i)$	รูปแบบความสัมพันธ์
1	$S_1=1$	0	$U(S_1)=0$
2	$S_2=4$	$1=0+1$	$U(S_2)=U(S_1)+a_1$
3	$S_3=9$	$4=1+3$	$U(S_3)=U(S_2)+a_2$
4	$S_4=16$	$9=4+5$	$U(S_4)=U(S_3)+a_3$
5	$S_5=25$	$16=9+7$	$U(S_5)=U(S_4)+a_4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$S_{n-1}=(n-1)^2$	$U(S_{n-1})=U(S_{n-2})+\big(2(n-2)-1\big)$	$U(S_{n-1})=U(S_{n-2})+a_{n-2}$
n	$S_n=n^2$	$U(S_n)=U(S_{n-1})+(2(n-1)-1)$ หรือ $U(S_n)=(n-1)^2$	$U(S_n)=U(S_n)+a_{n-1}$

จากตารางที่ 3 พบว่า $a_{n-2}=2(n-2)-1$ และ $a_{n-1}=2(n-1)-1$ พิจารณาได้จากความสัมพันธ์ของลำดับ $a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots$ คือ $1, 3, 5, 7, \ldots$ ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์ทั่วไปคือ $a_n=2n-1$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1 ตารางหน่วยและจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม S_n

ทฤษฎีบทที่ 3 กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $U(S_n)$ แทนจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1 ตารางหน่วยที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม S_n จะได้ว่า $U(S_n)=(n-1)^2$

บทพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $U(S_n)=(n-1)^2$

(1) เมื่อ $n=1$ จะได้ $P(1)$ คือ $U(S_1)=(1-1)^2=0$ ซึ่งเป็นจริง

(2) ให้ k แทนจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง
นั่นคือ $U(S_k)=(k-1)^2$ เป็นจริง

(3) จะต้องพิสูจน์ว่า $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย

จากตารางที่ 3 ได้ว่า $U(S_n)=U(S_{n-1})+\big(2(n-1)-1\big)$

เนื่องจาก $U(S_k)=(k-1)^2$

ได้ว่า $U(S_k)+(2k-1)=(k-1)^2+\big(2k-1\big)$

นั่นคือ $U(S_{k+1})=k^2$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n □

เมื่อพิจารณาจำนวนจุดและจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทุกขนาด ที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมสรุปได้ดังตารางที่ 4

ตารางที่ 4 จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทุกขนาด ของจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม

n	จำนวนจุด S_i	จำนวนรูปสี่เหลียมจัตุรัสขนาด 1 ตารางหน่วย $U(S_i)$	จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทุกขนาด $V(S_i)$	รูปแบบความสัมพันธ์
1	$S_1=1$	0	0	$V(S_1)=0$
2	$S_2=4$	1	$1=0+1$	$V(S_2)=V(S_1)+U(S_2)$
3	$S_3=9$	4	$5=1+4$	$V(S_3)=V(S_2)+U(S_3)$
4	$S_4=16$	9	$14=5+9$	$V(S_4)=V(S_3)+U(S_4)$
5	$S_5=25$	16	$30=14+16$	$V(S_5)=V(S_4)+U(S_5)$
6	$S_6=36$	25	$55=30+25$	$V(S_6)=V(S_5)+U(S_6)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$S_{n-1}=(n-1)^2$	$U(S_{n-1})=(n-2)^2$	$V(S_{n-1})=V(S_{n-2})+U(S_{n-1})$	$V(S_{n-1})=V(S_{n-2})+U(S_{n-1})$
n	$S_n=n^2$	$U(S_n)=(n-1)^2$	$V(S_n)=V(S_{n-1})+U(S_n)$ หรือ $V(S_n)=\dfrac{2n^3-3n^2+n}{6}$	$V(S_n)=V(S_{n-1})+U(S_n)$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทุกขนาดและจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม S_n

ทฤษฎีบทที่ 4 กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $V(S_n)$ แทนจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทุกขนาด ที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม S_n จะได้ว่า $V(S_n)=\dfrac{2n^3-3n^2+n}{6}$

บทพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $V(S_n)=\dfrac{2n^3-3n^2+n}{6}$

(1) เมื่อ $n=1$ จะได้ $P(1)$ คือ $V(S_1)=\dfrac{2\cdot1^3-3\cdot1^2+1}{6}=0$ ซึ่งเป็นจริง

(2) ให้ k แทนจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ $V(S_k)=\dfrac{2k^3-3k^2+k}{6}$ เป็นจริง

(3) จะต้องพิสูจน์ว่า $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย

นั่นคือต้องพิสูจน์ว่า $V(S_{k+1})=\dfrac{2(k+1)^3-3(k+1)^2+(k+1)}{6}$

จากตารางที่ 4 จะได้ $V(S_n)=V(S_{n-1})+U(S_n)$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}V(S_{k+1}) &= V(S_k)+U(S_{k+1})\\ &= \frac{2k^3-3k^2+k}{6}+\left[(k+1)-1\right]^2\\ &= \frac{2k^3+3k^2+k}{6}\\ &= \frac{2(k^3+3k^2+3k+1)-3(k^2+2k+1)+k+1}{6}\\ &= \frac{2(k+1)^3-3(k+1)^2+(k+1)}{6}\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า $V(S_n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n □

เมื่อพิจารณาจำนวนจุดและจำนวนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหมดที่เกิดจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมสรุปได้ดังตารางที่ 5

ตารางที่ 5 จำนวนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าของจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม

n	จำนวนจุด S_i	จำนวนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทุกขนาด $W(S_i)$	รูปแบบความสัมพันธ์
1	$S_1 = 1$	0	$W(S_1) = 0$
2	$S_2 = 4$	$0 = 0 + 0$	$W(S_2) = W(S_1) + a_1$
3	$S_3 = 9$	$4 = 0 + 4$	$W(S_3) = W(S_2) + a_2$
4	$S_4 = 16$	$22 = 4 + 18$	$W(S_4) = W(S_3) + a_3$
5	$S_5 = 25$	$70 = 22 + 48$	$W(S_5) = W(S_4) + a_4$
6	$S_6 = 36$	$170 = 70 + 100$	$W(S_6) = W(S_5) + a_5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$S_{n-1} = (n-1)^2$	$W(S_{n-1}) = W(S_{n-2}) + ((n-2)^3 - (n-2)^2)$	$W(S_{n-1}) = W(S_{n-2}) + a_{n-2}$
n	$S_n = n^2$	$W(S_n) = W(S_{n-1}) + ((n-1)^3 - (n-1)^2)$ หรือ $W(S_n) = \dfrac{3n^4 - 10n^3 + 9n^2 - 2n}{12}$	$W(S_n) = W(S_{n-1}) + a_{n-1}$

จากตารางที่ 1.5 พบว่า $a_{n-2} = (n-2)^3 - (n-2)^2$ และ $a_{n-1} = (n-1)^3 - (n-1)^2$ พิจารณาได้จากความสัมพันธ์ของลำดับ $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ คือ $0, 4, 18, 48, \ldots$ ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์ทั่วไปคือ $a_n = n^3 - n^2$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทุกขนาดและจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม S_n

ทฤษฎีบทที่ 5 กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $W(S_n)$ แทนจำนวนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทุกขนาด ที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม S_n จะได้ว่า $W(S_n) = \dfrac{3n^4 - 10n^3 + 9n^2 - 2n}{12}$

บทพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $W(S_n) = \dfrac{3n^4 - 10n^3 + 9n^2 - 2n}{12}$

(1) เมื่อ $n = 1$ จะได้ $P(1)$ คือ $W(S_1) = \dfrac{3 \cdot 1^4 - 10 \cdot 1^3 + 9 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1}{12} = 0$ ซึ่งเป็นจริง

(2) ให้ k แทนจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ $W(S_k) = \dfrac{3k^4 - 10k^3 + 9k^2 - 2k}{12}$ เป็นจริง

(3) จะต้องพิสูจน์ว่า $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย

นั่นคือต้องพิสูจน์ว่า $W(S_{k+1}) = \dfrac{3(k+1)^4 - 10(k+1)^3 + 9(k+1)^2 - 2(k+1)}{12}$

จากตารางที่ 1.5 จะได้ $W(S_n) = W(S_{n-1}) + ((n-1)^3 - (n-1)^2)$

เนื่องจาก $W(S_k) = \dfrac{3k^4 - 10k^3 + 9k^2 - 2k}{12}$

จะได้
$$W(S_k) + (k^3 - k^2) = \frac{3k^4 - 10k^3 + 9k^2 - 2k}{12} + (k^3 - k^2)$$
$$W(S_{k+1}) = \frac{3k^4 - 10k^3 + 9k^2 - 2k}{12} + \frac{12(k^3 - k^2)}{12}$$
$$= \frac{3k^4 + 2k^3 - 3k^2 - 2k}{12}$$
$$= \frac{3(k+1)^4 - 10(k+1)^3 + 9(k+1)^2 - 2(k+1)}{12}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n □

และจากทฤษฎีบทที่ 4 และทฤษฎีบทที่ 5 เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทุกขนาดกับจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยมได้ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ โดยที่ $Z(S_n)$ แทนจำนวนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทุกขนาด ที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม S_n, $V(S_n)$ แทนจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทุกขนาด ที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม S_n และ $W(S_n)$ แทนจำนวนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทุกขนาด ที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม S_n จะได้ว่า $Z(S_n)=V(S_n)+W(S_n)=\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2$

บทพิสูจน์ เนื่องจากจำนวนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทุกขนาดที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม S_n คือผลบวกของจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทุกขนาดและจำนวนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทุกขนาดที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม S_n

นั่นคือ $Z(S_n)=V(S_n)+W(S_n)$ และจากทฤษฎีบทที่ 4 และทฤษฎีบทที่ 5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
Z(S_n) &= V(S_n)+W(S_n)\\
&= \frac{2n^3-3n^2+n}{6}+\frac{3n^4-10n^3+9n^2-2n}{12}\\
&= \frac{2(2n^3-3n^2+n)+(3n^4-10n^3+9n^2-2n)}{6}\\
&= \frac{3n^4-6n^3+3n^2}{12}\\
&= \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2
\end{aligned}$$

บทสรุป

การพิจารณาหาความสัมพันธ์ของจำนวนรูปสามหลี่ยมด้านเท่าที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสามเหลี่ยมและความสัมพันธ์ของจำนวนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม สามารถหาความสัมพันธ์โดยเขียนเป็นทฤษฎีบท และใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ ได้ 5 ทฤษฎีบท และ 1 บทแทรกได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $Q(T_n)$ แทนจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้าน 1 หน่วยที่เกิดจากจำนวนสามเหลี่ยม T_n จะได้ว่า $Q(T_n)=(n-1)^2$

ทฤษฎีบทที่ 2 กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $R(T_n)$ แทนจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมดที่เกิดจากจำนวนสามเหลี่ยม T_n จะได้ว่า $R(T_n)=\begin{cases}0 & ;\ n=1\\ 1 & ;\ n=2\\ \dfrac{n^3-3n^2+8n-9}{3} & ;\ n\geq 3\end{cases}$

ทฤษฎีบทที่ 3 กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $U(S_n)$ แทนจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1 ตารางหน่วยที่เกิดจากจำนวนสี่เหลี่ยม S_n จะได้ว่า $U(S_n)=(n-1)^2$

ทฤษฎีบทที่ 4 กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $V(S_n)$ แทนจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทุกขนาด ที่เกิดจากจำนวนสี่เหลี่ยม S_n จะได้ว่า $V(S_n)=\dfrac{2n^3-3n^2+n}{6}$

ทฤษฎีบทที่ 5 กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $W(S_n)$ แทนจำนวนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทุกขนาด ที่เกิดจากจำนวนสี่เหลี่ยม S_n จะได้ว่า $W(S_n)=\dfrac{3n^4-10n^3+9n^2-2n}{12}$

บทแทรก กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ โดยที่ $Z(S_n)$ แทนจำนวนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทุกขนาด ที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม S_n , $V(S_n)$ แทนจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทุกขนาด ที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม S_n และ $W(S_n)$ แทนจำนวนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทุกขนาดที่เกิดจากจำนวนเชิงรูปสี่เหลี่ยม S_n จะได้ว่า $Z(S_n)=V(S_n)+W(S_n)=\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2$

เอกสารอ้างอิง

นฤพนธ์ นพคุณ. (2556). จำนวนเชิงรูปหลายเหลี่ยม. https://coolaun.com/math/pascal_tri/poly_no/. ค้นเมื่อ 19 มิถุนายน 2559

วุฒิชัย ภูดี. (2554). การหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดในรูปสามเหลี่ยม n หน่วย. https://issuu.com/wuttichaiphoodee/docs/binder2 ค้นเมื่อ 26 มิถุนายน 2560

สมพงค์ จิตต์มั่น กำพล อวชัย และพุทธิชัย ต้นลา. (2017). จำนวนสามเหลี่ยมหน้าจั่ว. วารสารคณิตศาสตร์ MJ-MATh. 62(692): 39-49

Betancourt, D., and Park, T. (2009). Polygonal Numbers[Project for MA 341 Introduction to Number Theory]. http://math.bu.edu/people/kost/teaching/MA341/PolyNums.pdf. ค้นเมื่อ 30 มิถุนายน 2559

❑❑❑❑❑