SsSci 2nd conference 2019

การประชุมสวนสุนันทาวิชาการด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ระดับชาติและนานาชาติ ครั้งที่ 2

“วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และนวัตกรรม เพื่อการพัฒนาที่ยั่งยืน”

The 2nd Suan Sunandha National and International Academic Conference on Science and Technology (SsSci 2019)

“Science, Technology and Innovation for Sustainable Development”

วันศุกร์ที่ 8 พฤศจิกายน 2562

8th November 2019

ณ โรงแรมเดอะรอยัลริเวอร์ กรุงเทพมหานคร

The Royal River Hotel, Bangkok, Thailand

Relation between Jacobsthal Sequence and Generalized Fibonacci Sequence

Nattinee Khongnual[1] Narisra Mayeng[2] Rattiya Rittichuai[3] and Onuma Ruksachol[4] 1 Faculty of Science and Technology Nakhon Si Thammarat Rajabhat University ; jeatlala@hotmail.co.th 2 Faculty of Science and Technology Nakhon Si Thammarat Rajabhat University ; narisra.nstru@gmail.com

3 Faculty of Science and Technology Nakhon Si Thammarat Rajabhat University ; yay_phung@hotmail.com 4 Faculty of Science and Technology Nakhon Si Thammarat Rajabhat University ; on.alongchong@gmail.com

Abstract

In this paper we present the relation between Jacobsthal Sequence and Generalized Fibonacci Sequence. The proof of these relation can be obtained by Binet's fomula such that Jacobsthal Sequence defined by $J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$ and Generalized Fibonacci Sequence defined by $V_n = 2\left(\frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}\right)$.

The results find that both sequence has various and we can compute about Jacobsthal Sequence and Generalized Fibonacci Sequence easier.

Keywords: Jacobsthal Sequence, Generalized Fibonacci Sequence

บทนำ

ลำดับฟีโบนัชชี เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดที่มีชื่อเสียงและเป็นที่นิยมในการศึกษาคุณสมบัติต่าง ๆ อย่างแพร่หลาย ลำดับฟีโบนัชชี ถูกค้นพบโดย "เลโอนาร์โด ปิซาโน บิเกลโล" นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลี โดยเขาได้ตีพิมพ์หนังสือการคำนวณ ชื่อ "Liber abaci" ในปี ค.ศ. 1202 จุดเริ่มต้นของการค้นพบลำดับฟีโบนัชชีเป็นเพียงโจทย์ที่กล่าวถึง "ปัญหาครอบครัวกระต่าย" ในหนังสือเล่มนี้เท่านั้น ซึ่งลำดับฟีโนนัชชีคือลำดับของจำนวนเต็มดังต่อไปนี้ โดยมีนิยามความสัมพันธ์ว่า จำนวนถัดไปเท่ากับผลบวกของจำนวนสองจำนวนก่อนหน้า และสองจำนวนแรกก็คือ และ ตามลำดับ หากเขียนให้อยู่ในรูปของสัญลักษณ์ นิยามในความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (1)$$

เมื่อ $n \geq 2$ โดยกำหนดค่าเริ่มต้น $F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$ (ศักดิ์ชัย สมดัง, 2557)

ลำดับฟีโบนัชชีดัดแปลง คือ ลำดับที่นิยามในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิดโดย

$$F_n = pF_{n-1} + qF_{n-2} \tag{2}$$

กำหนดค่าเริ่มต้น $F_0 = a$ และ $F_1 = b$ เมื่อ $n \geq 2$ และ p, q, a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก (Yashwant K. Panwar, Bijiendra Singh and V.K. Gupta, 2014) ซึ่งในบทความนี้เราจะศึกษากรณีที่ $p = 1,\ q = a = b = 2$ และเขียนลำดับดังกล่าวให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ V_n จากสมการที่ (2) ได้นิยามของลำดับฟีโบนัชชีดัดแปลง V_n ในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ

$$V_n = V_{n-1} + 2V_{n-2} \tag{3}$$

กำหนดค่าเริ่มต้น $V_0 = 2$ และ $V_1 = 2$ เมื่อ $n \geq 2$ สามารถเขียนในรูปลำดับของจำนวนเต็ม คือ $2, 2, 6, 10, 22, 42, \ldots$ (Yashwant K. Panwar, Bijiendra Singh and V. K. Gupta, 2014)

ลำดับจาคอปส์ทอล เป็นลำดับที่มีการประยุกต์ใช้ในด้านต่าง ๆ ทางวิทยาศาสตร์ หากเขียนให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ J_n นิยามในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2} \tag{4}$$

โดยกำหนดค่าเริ่มต้น $J_0 = 0$ และ $J_1 = 1$ เมื่อ $n \geq 2$ สามารถเขียนในรูปลำดับของจำนวนเต็ม คือ $0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, \ldots$ (นนธิยา มากะเต, 2561)

วัตถุประสงค์

เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างลำดับจาคอปส์ทอลและลำดับฟีโบนัชชีดัดแปลง 4 ทฤษฎี

สูตรไบเนต (Binet's formular)

ในศตวรรษที่ 19 นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ Jacques Philippe Marie Binet ได้ค้นพบข้อสังเกตเกี่ยวกับลำดับฟีโบนัชชี โดยเป็นการเขียนลำดับฟีโบนัชชีในรูปแบบของความสัมพันธ์ที่อยู่ในพจน์ของ R_1 และ R_2 เมื่อ R_1 และ R_2 เป็นรากของสมการ $x^2 - x - 2 = 0$ บทความนี้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างลำดับจาคอปส์ทอลและลำดับฟีโบนัชชีดัดแปลง โดยผู้วิจัยใช้สูตรไบเนตของลำดับฟีโบนัชชีดัดแปลง และสูตรไบเนตของลำดับจาคอปส์ทอลในการพิสูจน์ ซึ่งสูตรไบเน็ตของลำดับทั้งสองนิยามดังต่อไปนี้

1. **สูตรไบเนตสำหรับลำดับฟีโบนัชชีดัดแปลง**

   กำหนด V_n เป็นลำดับฟีโบนัชชีดัดแปลง นิยามโดย (Yashwant K. Panwar, Bijiendra Singh and V. K. Gupta, 2014)

$$V_n = 2\left(\frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}\right) \tag{5}$$

2. **สูตรไบเนตสำหรับลำดับจาคอปส์ทอล**

   กำหนด J_n เป็นลำดับจาคอปส์ทอล นิยามโดย (นนธิยา มากะเต, 2561)

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \tag{6}$$

ผลการวิจัย

จากการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างลำดับจาคอปส์ทอลและลำดับฟีโบนัชชีดัดแปลง ผู้วิจัยได้ค้นพบความสัมพันธ์ของลำดับทั้งสองในหลากหลายรูปแบบ ซึ่งสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทและบทแทรกได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 กำหนด J_n เป็นลำดับจาคอปส์ทอล และ V_n เป็นลำดับฟีโบนัชชีดัดแปลง จะได้

$$J_n + V_n = \frac{5 \cdot 2^n + (-1)^n}{3} \tag{7}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ กำหนด J_n เป็นลำดับจาคอปส์ทอล และ V_n เป็นลำดับฟีโบนัชชีดัดแปลง
จากสมการที่ (5) และ (6)
ได้

$$J_n = \left(\frac{2^n - (-1)^n}{3}\right)$$

และ

$$V_n = 2\left(\frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}\right)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} J_n + V_n &= \left(\frac{2^n - (-1)^n}{3}\right) + 2\left(\frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left((2^n - (-1)^n) + (2 \cdot 2^{n+1} - 2(-1)^{n+1})\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n + 4 \cdot 2^n - 2(-1)^{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left[5 \cdot 2^n + (-1)^n\right] \\ &= \frac{5 \cdot 2^n + (-1)^n}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$J_n + V_n = \frac{5 \cdot 2^n + (-1)^n}{3}$$

บทแทรก 1 สำหรับจำนวนเต็มบวก k ได้ว่า

$$J_{2k} + V_{2k} = \frac{5 \cdot 4^k + 1}{3} \tag{8}$$

ทฤษฎีบทที่ 2 กำหนด J_n เป็นลำดับจาคอปส์ทอล และ V_n เป็นลำดับฟีโบนัชชีดัดแปลง จะได้

$$J_n^2 + V_n^2 = \frac{1}{9}\left[17 \cdot 2^{2n} + 14(-2)^n + 5\right] \tag{9}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ กำหนด J_n เป็นลำดับจาคอปส์ทอล และ V_n เป็นลำดับฟีโบนัชชีดัดแปลง
จากสมการที่ (5) และ (6)
ได้

$$J_n = \left(\frac{2^n - (-1)^n}{3}\right)$$

และ

$$V_n = 2\left(\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}\right)$$

พิจารณา

$$J_n^2 + V_n^2 = \left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3^2}\left[\left(2^n-(-1)^n\right)^2 + 4\left(2^{n+1}-(-1)^{n+1}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3^2}\left[\left(2^n\right)^2 - 2\left(2^n\right)(-1)^n + \left((-1)^n\right)^2 + 4\left(\left(2^{n+1}\right)^2 - 2\left(2^{n+1}\right)(-1)^{n+1} + \left((-1)^{n+1}\right)^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3^2}\left[\left(2^{2n}\right) - 2^{n+1}(-1)^n + (-1)^{2n} + 4\left(2^{2n+2} - 2^{n+2}(-1)^{n+1} + (-1)^{2n+2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3^2}\left[\left(2^{2n}\right) - 2^{n+1}(-1)^n + 1 + 2^{2n+4} - 2^{n+4}(-1)^{n+1} + 4\right]$$

$$= \frac{1}{3^2}\left[\left(2^{2n} + 2^{2n+4}\right) - \left(2^{n+1}(-1)^n + 2^{n+4}(-1)^{n+1}\right) + 1 + 4\right]$$

$$= \frac{1}{3^2}\left[2^{2n}\left(1+2^4\right) - 2^{n+1}(-1)^n\left(1+2^3(-1)\right) + 5\right]$$

$$= \frac{1}{3^2}\left[2^{2n}(17) - 2^{n+1}(-1)^n(-7) + 5\right]$$

$$= \frac{1}{3^2}\left[(17)\left(2^{2n}\right) + 7\left(2^{n+1}\right)(-1)^n + 5\right]$$

ดังนั้น $J_n^2 + V_n^2 = \dfrac{1}{9}\left[17 \cdot 2^{2n} + 14(-2)^n + 5\right]$

ทฤษฎีบทที่ 3 กำหนด J_n เป็นลำดับจาคอปส์ทอล และ V_n เป็นลำดับฟีโบนัชชีดัดแปลง จะได้

$$J_{n+1}^2 + V_n^2 = \frac{5}{9}\left[2^{2n+2} + (-2)^{n+2} + 1\right] \qquad (10)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ กำหนด J_n เป็นลำดับจาคอปส์ทอล และ V_n เป็นลำดับฟีโบนัชชีดัดแปลง
จากสมการที่ (5) และ (6)
ได้

$$J_{n+1} = \left(\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}\right)$$

และ

$$V_n = 2\left(\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}\right)$$

พิจารณา

$$J_{n+1}^2+V_n^2=\left(\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}\right)^2+4\left(\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}\right)^2$$

$$=\frac{1}{3^2}\left[\left(2^{n+1}-(-1)^{n+1}\right)^2+4\left(2^{n+1}-(-1)^{n+1}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{3^2}\left[\left(2^{n+1}\right)^2-2\left(2^{n+1}\right)(-1)^{n+1}+\left((-1)^{n+1}\right)^2+4\left(\left(2^{n+1}\right)^2-2\left(2^{n+1}\right)(-1)^{n+1}+\left((-1)^{n+1}\right)^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3^2}\left[\left(2^{2n+2}\right)-2^{n+2}(-1)^{n+1}+(-1)^{2n+2}+4\left(2^{2n+2}-2^{n+2}(-1)^{n+1}+(-1)^{2n+2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3^2}\left[\left(2^{2n+2}\right)-2^{n+2}(-1)^{n+1}+1+2^{2n+4}-2^{n+4}(-1)^{n+1}+4\right]$$

$$=\frac{1}{3^2}\left[\left(2^{2n+2}+2^{2n+4}\right)-\left(2^{n+2}(-1)^{n+1}+2^{n+4}(-1)^{n+1}\right)+1+4\right]$$

$$=\frac{1}{3^2}\left[2^{2n+2}\left(1+2^2\right)-2^{n+2}(-1)^{n+1}\left(1+2^2\right)+5\right]$$

$$=\frac{1}{3^2}\left[2^{2n+2}(5)-2^{n+2}(-1)^{n+1}(5)+5\right]$$

$$=\frac{1}{3^2}\left[(5)\left(2^{2n+2}\right)-5\left(2^{n+2}\right)(-1)^{n+1}+5\right]$$

$$=\frac{5}{9}\left[\left(2^{2n+2}\right)-\left(2^{n+2}\right)(-1)^{n+1}+1\right]$$

ดังนั้น $$J_{n+1}^2+V_n^2=\frac{5}{9}\left[2^{2n+2}+(-2)^{n+2}+1\right]$$

ทฤษฎีบทที่ 4 กำหนด J_n เป็นลำดับจาคอปส์ทอล และ V_n เป็นลำดับฟีโบนัชชีดัดแปลง จะได้

$$J_{n+1}V_n+J_nV_{n+1}=\frac{2}{9}\left[2^{2n+3}-(-2)^n+2\right] \qquad (11)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ กำหนด J_n เป็นลำดับจาคอปส์ทอล และ V_n เป็นลำดับฟีโบนัชชีดัดแปลง
จากสมการที่ (5) และ (6)

ได้

$$J_{n+1}=\left(\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}\right), \qquad J_n=\left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right)$$

และ

$$V_{n+1}=2\left(\frac{2^{n+2}-(-1)^{n+2}}{3}\right), \qquad V_n=2\left(\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}\right)$$

พิจารณา

$$J_{n+1}V_n + J_nV_{n+1} = \left[\left(\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}\right)2\left(\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}\right)\right]+\left[\left(\frac{2^{n}-(-1)^{n}}{3}\right)2\left(\frac{2^{n+2}-(-1)^{n+2}}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{2}{9}\left[\left(2^{n+1}-(-1)^{n+1}\right)\left(2^{n+1}-(-1)^{n+1}\right)\right]+\frac{2}{9}\left[\left(2^{n}-(-1)^{n}\right)\left(2^{n+2}-(-1)^{n+2}\right)\right]$$

$$=\frac{2}{9}\left[2^{2n+2}-2^{n+1}(-1)^{n+1}-(-1)^{n+1}2^{n+1}+(-1)^{2n+2}+2^{2n+2}-2^{n}(-1)^{n+2}-(-1)^{n}2^{n+2}+(-1)^{2n+2}\right]$$

$$=\frac{2}{9}\left[2\cdot 2^{2n+2}-2^{n+1}(-1)^{n+1}-(-1)^{n+1}2^{n+1}+2-2^{n}(-1)^{n+2}-(-1)^{n}2^{n+2}\right]$$

$$=\frac{2}{9}\left[2^{2n+3}-2^{n+1}(-1)^{n+1}-(-1)^{n+1}2^{n+1}+2-2^{n}(-1)^{n+2}-(-1)^{n}2^{n+2}\right]$$

$$=\frac{2}{9}\left[2^{2n+3}+2^{n+1}(-1)^{n}+(-1)^{n}2^{n+1}+2-2^{n}(-1)^{n}-(-1)^{n}2^{n+2}\right]$$

$$=\frac{2}{9}\left[2^{2n+3}+2^{n}(-1)^{n}\left(2+2-1-2^{2}\right)+2\right]$$

$$=\frac{2}{9}\left[2^{2n+3}-2^{n}(-1)^{n}+2\right]$$

ดังนั้น $J_{n+1}V_n + J_nV_{n+1} = \frac{2}{9}\left[2^{2n+3}-(-2)^{n}+2\right]$

สรุป

ผลการศึกษาพบว่า ลำดับจาคอปส์ทอลและลำดับฟีโบนัชชีดัดแปลงมีความสัมพันธ์กันในหลากหลายรูปแบบ โดยความสัมพันธ์ในรูปแบบต่าง ๆ สามารถพิสูจน์ได้โดยใช้สูตรของไบเนต ซึ่งความสัมพันธ์ที่ได้จะช่วยในการคำนวณเกี่ยวกับลำดับจาคอปส์ทอลและลำดับฟีโบนัชชีดัดแปลงให้ง่ายและสะดวกมากขึ้น

เอกสารอ้างอิง

ศักดิ์ชัย สมดัง. (2557). **ลำดับฟีโบนัชชี.** สืบค้นเมื่อ 25 สิงหาคม 2562, จาก http://khroonoi.blogspot.com/2014/10/blog-post.html

Bijiendra Singh, V. K. Gupta and Yashwant K. (2014). **Generalized Fibonacci Sequences and Its Properties.** Palestine Journal of Mathematics, 141-147

นนธิยา มากะตา. (2561). **ลำดับจาคอปส์ทอล.** สืบค้นเมื่อ 25 สิงหาคม 2562, จาก http://www.sci.rmutt.ac.th/wp-content/loads/2018/03/เอกลักษณ์สำหรับจาคอปส์ทอลควอเทอร์เนียนและจาคอปส์ทอลลูคัสควอเทอร์เนียน.pdf