บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความหมายของกลศาสตร์

กลศาสตร์เป็นสาขาหนึ่งของวิทยาศาสตร์ ที่ศึกษาเกี่ยวกับเรื่องของแรงและผลการกระทำของแรงที่มีต่อวัตถุต่างๆ จุดประสงค์เพื่อคาดคะเนพฤติกรรมของวัตถุ ทั้งที่อยู่ในสภาพนิ่งหรือกำลังเคลื่อนที่ภายใต้การกระทำของแรง กลศาสตร์แบ่งออกได้เป็นสามแขนงตามประเภทของวัตถุที่ศึกษา ได้แก่ กลศาสตร์ของวัตถุแข็งเกร็ง(Mechanics of rigid bodied) กลศาสตร์ของวัตถุที่เสียรูปได้ (Mechanics of deformable bodied) และกลศาสตร์ของไหล (Mechanics of fluids)

กลศาสตร์ของวัตถุแข็งเกร็ง ได้ตั้งสมมุติฐานไว้ว่า วัตถุที่รับแรงกระทำไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างหรือน้ำหนัก ทั้งที่ในความเป็นจริงแล้วหากวัตถุมีแรงมากระทำ วัตถุจะมีการเสียรูปเสมอ แต่หากวัตถุมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างน้อยมากจนแทบจะไม่มีผลเลยในการวิเคราะห์ เราจึงถือว่าวัตถุดังกล่าวมีรูปร่างคงที่ กลศาสตร์ของวัตถุแข็งเกร็งจะแบ่งย่อยออกเป็นสองส่วนประกอบด้วย สถิตยศาสตร์ (Statics) ซึ่งจะพิจารณาเฉพาะวัตถุที่อยู่นิ่งภายใต้การกระทำของแรงในสภาวะสมดุล ในส่วนที่สองคือพลศาสตร์ (Dynamics) ซึ่งจะพิจารณาวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่ภายใต้การกระทำของแรง อาจกล่าวได้ว่ากลศาสตร์เป็นความรู้พื้นฐานทางด้านวิศวกรรมในแทบทุกสาขาวิชาเพราะเกี่ยวกับการศึกษาปรากฏการณ์ต่างๆทางกายภาพ เช่นแรง สมดุลของแรง สภาพของวัตถุที่รับแรงกระทำทั้งที่หยุดนิ่งและกำลังเคลื่อนที่

1.2 แนวคิดและหลักการพื้นฐาน

ในการศึกษาด้านกลศาสตร์จะใช้กฎของนิวตัน ซึ่งจะมี สเปซ เวลาและมวลเป็นปริมาณสัมบูรณ์ที่ไม่ขึ้นต่อกัน ซึ่งจะแตกต่างกับกลศาสตร์ของทฤษฎีสัมพันธภาพซึ่งถือว่าเวลาขึ้นอยู่กับตำแหน่งในสเปซด้วย แต่มวลของวัตถุจะแปรผันตามความเร็ววัตถุนั้น สำหรับวิชากลศาสตร์แนวคิดพื้นฐานทั้งสี่ประกอบด้วย

แนวคิดของสเปซ ซึ่งมีการเกี่ยวพันธ์กับการนิยามหรือการกำหนดตำแหน่งของจุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุด ยกตัวอย่างเช่น จุด A ตำแหน่งของจุด A ในสเปซ สามารถนิยามด้วยค่าระยะความยามสามค่าในระนาบที่ตั้งฉากกันสามระนาบ ที่วัดจากจุดอ้างอิงที่แน่นอนจุดหนึ่งหรือที่เรียกว่าจุดกำเนิดไปยังสามทิศทางที่ตั้งฉากกัน โดยระยะความยาวทั้งสามค่านี้เรียกว่าค่าพิกัดของจุด A

แนวคิดของเวลา จะเกี่ยวเนื่องกับการนิยามของเหตุการณ์ เพราะการนิยามตำแหน่งในสเปซเพียงอย่างเดียว ยังไม่เพียงพอที่จะกำหนดเหตุการณ์ได้อย่างครบถ้วนสมบูรณ์ จึงจำเป็นต้องมีปริมาณที่ที่ใช้สำหรับวัดเพื่อเปรียบเทียบต่อเนื่องก่อนและหลังการเกิดเหตุการณ์อีกด้วย

แนวคิดของมวล จะใช้บอกลักษณะเฉพาะของของวัตถุ ที่อาจเปรียบเทียบกันได้โดยอาศัยผลการทดลองพื้นฐานเช่นวัตถุสองชนิดที่มีมวลเท่ากันจะถูกแรงดึงดูดของโลกดึงดูดในลักษณะที่เหมือนกัน

แนวคิดของแรง คือสิ่งที่เป็นตัวแทนของการกระทำของวัตถุหนึ่งที่มีผลต่อวัตถุอีกอันหนึ่ง แรงอาจกระทำได้โดยการสัมผัสโดยตรงระหว่างวัตถุทั้งสอง หรือวัตถุกระทำต่อกันในขณะที่วัตถุอยู่ห่างกัน เช่น วัตถุถูกแรงโน้มถ่วงของโลกดึงดูดให้ตกลงสู่พื้นด้านล่าง ในการนิยามความหมายของแรงต้องประกอบด้วยขนาดของแรง ทิศทางของแรงและจุดกระทำของแรง ซึ่งอาจจะอธิบายการกระทำของแรงได้ด้วยเวกเตอร์ โดยแทนขนาดของแรงด้วยความยาวเส้นตรง ซึ่งมีลูกศรแสดงทิศทางของแรงจากจุดเริ่มต้นถึงจุดสิ้นสุด

1.3ระบบของหน่วย

ในการกล่าวถึงความสัมพันธ์ทั้งสี่ของกลศาสตร์ซึ่งประกอบไปด้วย สเปซ เวลา มวลและแรง ก็คือระบบของหน่วยที่เรียกว่าหน่วยคิเนติกส์ (Kinetic unit) ประกอบไปด้วยหน่วยของระยะ หน่วยของเวลา หน่วยของมวลและหน่วยของแรง ระบบหน่วยทางกลศาสตร์ที่ใช้อยู่ประกอบไปด้วยสองหน่วยหลักคือ ระบบหน่วย SI และระบบหน่วย U.S.

1.3.1 ระบบหน่วย SI ซึ่งย่อมาจาก International System of Units เป็นระบบหน่วยสากลที่นิยมใช้กันทั่งโลก หน่วยมูลฐานของระบบ SI คือ หน่วยของความยาว มวลและเวลาโดยเรียกหน่วยของความยาวว่าเมตร เรียกหน่วยของมวลว่ากิโลกรัมและเรียกหน่วยของเวลาว่าวินาทีซึ่งหน่วยดังกล่าวได้ถูกนิยามไว้ดังนี้

หน่วยวินาที หมายถึงช่วงเวลาที่ที่อะตอมของซีเซียม 133 ซึ่งอยู่ภายใต้สภาวะที่กำหนดบางประการได้แผ่รังสีไป 9,192,631,770 รอบ

หน่วยของเมตร หมายถึงความยาว 1,650,763.73 เท่าของความยาวคลื่นของสเปคตรัมเส้นสีม่วง-แดงของอะตอมคริปตอน 86

หน่วยของกิโลกรัม ถูกนิยามว่าหมายถึงมวลของแท่งแพลตินัม-อิริเดียมมาตรฐานที่เก็บรักษาไว้ที่สำนักมาตรฐานน้ำหนักและการวัดนานาชาติ(International Bureau of Weights and Measures) ในกรุงปารีส ประเทศฝรั่งเศส

ในระบบหน่วย SI นี้ได้กำหนดให้แรงเป็นหน่วยอนุพัทธ์เรียกว่า นิวตัน ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย N โดยแรงหนึ่งนิวตันจะได้จากการแทนค่าหน่วยมูลฐานในสมการที่ 1.1 ซึ่งก็คือกฎข้อที่สองของนิวตัน จะเห็นได้ว่าแรง 1 นิวตันก็คือแรงที่ทำให้มวล 1 kg. เกิดความเร่ง 1 m/s^2

$$F = ma \qquad 1.1$$

$$F(N) = 1(kg.) \times 1(m/s^2)$$

ระบบหน่วย SI เป็นระบบหน่วยที่เรียกกันว่า ระบบหน่วยสัมบูรณ์ (absolute system of unit) นั้นคือ หน่วยมูลฐานทั้งสามหน่วยที่นิยามไว้เป็นอิสระไม่ขึ้นกับตำแหน่งที่ได้ทำการวัดค่าของหน่วยเหล่านี้ ซึ่งค่าของหน่วยเมตร กิโลกรัมและวินาที จะไม่เปลี่ยนแปลงไปไม่ว่าจะทำการวัดที่ใดในโลกนี้ สำหรับน้ำหนัก

ของวัตถุหรือแรงโน้มถ่วงที่โลกกระทำต่อวัตถุนั้น ก็จะมีหน่วยเป็นนิวตันด้วยเพราะวัตถุจะถูกแรงโน้มถ่วงกระทำด้วยความแร่ง 9.81 m/s^2 และจากสมการ 1.1 น้ำหนักของวัตถุมวล 1 kg. ที่อยู่บนผิวโลกจะมีค่า

$$F = ma$$

$$F(N) = 1(kg.) \times 9.81(m/s^2)$$

$$F = 9.81\ N$$

ในบางครั้งปริมาณหรือขนาดของวัตถุอาจเป็นค่าที่น้อยมากๆเช่น มีค่าเพียงเศษหนึ่งส่วนพันล้าน หรือ 0.0000000001 หรือในบางครั้งอาจมีค่าสูงมากๆ เช่นมีขนาดเป็นร้อยล้านเท่า 100,000,000 เพื่อความสะดวกและไม่ต้องเขียนเลขจำนวนหลายๆหลัก จึงได้มีการกำหนดให้ใช้สัญลักษณ์นำหน้าเพื่อใช้เป็นตัวย่อ ยกตัวอย่างเช่น 1,000,000 อาจเขียนแทนด้วย 10^6 หรือใช้ตำอุปสรรคนำหน้าว่า mega หรือ 0.000000001 เขียนแทนด้วย 10^{-9} หรือใช้ตำอุปสรรคนำหน้าว่า nano ดังตารางที่ 1.1

หน่วยที่นิยมใช้กันมากสำหรับความยาวคือกิโลเมตรและมิลลิเมตร สำหรับมวลคือเมกกะกรัมและกรัม ในส่วนของแรงก็คือกิโลนิวตันและเมกกะนิวตัน แต่หน่วยของเวลานิยมที่จะใช้หน่วยใหญ่ที่เรียกว่านาทีและชั่วโมงแทน ซึ่งมีค่าเป็น 60 และ 360 วินาทีตามลำดับ

ตารางที่ 1.1 สัญลักษณ์ที่ใช้แทนคำอุปสรรค

ตัวคูณ	สัญลักษณ์		
1 000 000 000 000	10^{12}	Tera	T
1 000 000 000	10^{9}	Giga	G
1 000 000	10^{6}	Mega	M
1 000	10^{3}	Kilo	k
100	10^{2}	Hector	h
10	10^{1}	Deka	da
0.1	10^{-1}	Deci	d
0.01	10^{-2}	Centi	c
0.001	10^{-3}	Milli	m
0.000 0001	10^{-6}	Nicro	μ
0.000 000 0001	10^{-9}	Nano	n
0.000 000 000 0001	10^{-12}	Pico	p
0.000 000 000 000 0001	10^{-15}	Femto	f
0.000 000 000 000 000 0001	10^{-18}	atto	a

1.3.2 ระบบหน่วย U.S. ซึ่งย่อมาจาก (Customary Units) หรือเรียกว่าหน่วยอังกฤษ หรือระบบหน่วยฟุต-ปอนด์-วินาที (FPS) เป็นระบบที่ใช้อย่างแพร่หลายรองลงมาจากระบบหน่วย SI หน่วยมูลฐานของระบบนี้คือหน่วยของความยาว แรงและเวลา โดยเรียกหน่วยความยาวว่าฟุต เรียกหน่วยน้ำหนักว่าปอนด์และเรียกหน่วยเวลาว่าวินาที ระบบหน่วย SI จะแตกต่างกับระบบ U.S. คือ ระบบ U.S. จะไม่ใช่หน่วยสัมบูรณ์ เพราะระบบหน่วยมูลฐานบางหน่วยขึ้นอยู่กับสภาวะภายนอกหรืออาจจะกล่าวได้ว่าระบบ U.S. ขึ้นอยู่กับแรงโน้มถ่วงของโลก หน่วยของมวลในระบบ U.S. จะเรียกว่าสะลัก (slug) ซึ่งจะเห็นได้ว่ามวลหนึ่งสะลักก็คือมวลที่ถูกกระทำด้วยแรงหนึ่งปอนด์และมีความเร่งเท่ากับ $1 ft/s^2$ ดังสมการที่ 1.2

$$F = ma$$

$$F(lb) = 1(slug) \times 1(ft/s^2)$$

นั้นคือ

$$1(slug) = \frac{1\ lb}{1(ft/s^2)} = 1\ lb.s^2/ft \qquad 1.2$$

ตามระบบ U.S. หน่วยย่อยของความยาวคือ นิ้ว(in) และหน่วยใหญ่คือ ไมล์ (mi) โดยที่ 12in = 1ft และ 5280 ft = 1 mi .ในส่วนของหน่วยย่อยของแรงคือ ออนซ์ (oz) และหน่วยใหญ่คือ กิโลปอนด์ (kip)

1.4 การแปลงหน่วย

เนื่องจากหน่วยที่ใช้ในปัจจุบันมีมากกว่าหนึ่งระบบ ดังนั้นในการคำนวณหรือออกแบบอาจมีความจำเป็นต้องแปลงค่าจากระบบหนึ่งไปสู่อีกระบบหนึ่ง ซึ่งในการแปลงหน่วยนั้นจำเป็นต้องรู้ค่าคงที่จะใช้ในการแปลงหน่วยเสียก่อน ค่าคงที่ตัวนี้เรียกว่า แฟกเตอร์การแปรผันซึ่งจากตารางที่ 1.2 ซึ่งแสดงค่าของหน่วย U.S. เทียบกับ หน่วย SI และจะแตกต่างกันขึ้นอยู่กับว่าจะแปลงจากหน่วยอะไรไปเป็นหน่วยอะไร

การแปลงหน่วยความยาวจากนิยามของหน่วยความยาวของหน่วย U.S. และ หน่วย SI จะมีความสัมพันธ์ดังนี้

จากตาราง 1.2 $\qquad 1ft = 0.3048\ m$

ดังนั้น $\qquad 1\ in = \frac{1}{12}(0.3048\ m) = 0.0254\ m$

หรือเขียนในรูปของ $\qquad 1\ in = 25.4\ mm$

นั้นคือแฟกเตอร์แปลงหน่วย ft เป็น m คือ 0.3048 m และจากหน่วย in เป็น mm ก็คือ 25.4 mm

การแปลงหน่วยของแรง จากที่กล่าวมาแล้วในตอนต้นว่าแรง 1 lb คือแรงดึงดูดที่โลกกระทำต่อมวล 0.4536 kg ดังนั้น

$$1\ lb = (0.4536\ kg)(9.807\ m/s^2)$$

$$= 4.448\ N$$

ดังนั้นแรง 1 ปอนด์ จะเท่ากับแรง 4.448 นิวตัน

การแปลงหน่วยจากระบบ SI เป็น U.S. เช่น โมเมนต์ขนาด 40 N.m สามารถแปลงให้เป็นหน่วย U.S.ได้โดย

$$M = (40\ N.m)$$

$$= 40\left(\frac{1\ bl}{4.448}\right)\left(\frac{1\ ft}{0.3048}\right)$$

$$= 29.5\ lb.ft$$

ตารางที่ 12 ค่าของหน่วย U.S. เทียบกับ หน่วย SI

ปริมาณ	หน่วย U.S.	หน่วย SI
acceleration	ft/s^2	0.3048 m/s^2
	in/s^2	0.0254 m/s^2
area	ft^2	0.0929 m^2
	in^2	645.2 mm^2
energy	ft.lb	1.356 J
force	kip	4.448 kN
	lb	4.448 N
	oz	0.2780 N
impulse	lb.s	4.448 N.s
length	ft	0.3048 m
	in	25.40 m
	mi	1.609 km
mass	oz mass	28.35 g
	lb mass	0.4536 kg
	slug	14.59 kg
	ton	907.2 kg
volume	ft^3	0.02832 m^3
	in^3	16.39 cm^3

1.5 การปัดจำนวนตัวเลข

เพื่อความแม่นยำถูกต้อง จะต้องมีกฎการปัดจำนวนตัวเลขให้มีตำแหน่งของคำตอบอยู่ที่ตำแหน่งที่ n ซึ่งโดยปกติแล้ว ถ้าจะทำการปัดตัวเลขในตำแหน่งที่ n แล้ว จะต้องพิจารณาเทอมที่ n+1 ซึ่งแบ่งได้ 3 กรณี ดังนี้

1. ถ้าตำแหน่งที่ n+1 มีค่าน้อยกว่า 5 จะทำการปัดทิ้ง ตัวอย่างเช่นหากเราต้องการปัดตัวเลข 2.326 ในตำแหน่งที่ 2 (n=2) จะได้ 2.3

2. ถ้าตำแหน่งที่ n+1 มีค่าเท่ากับ 5 ให้พิจารณาเทอมที่อยู่ด้านหน้าของเลข 5 ซึ่งก็คือ ตำแหน่งที่ต้องการนั่นเอง ถ้าตำแหน่งดังกล่าวเป็นเลขคี่ให้ปัดขึ้น แต่ถ้าด้านหน้าของเลข 5 เป็นเลขคู่ ให้ปัดเลข 5 ทิ้ง ตัวอย่างเช่นหากเราต้องการปัดตัวเลข 1.245 ในตำแหน่งที่ 3 จะได้ 1.24 หรือ ปัดเลขในตำแหน่งที่ 3 ของ 0.8655 จะได้ 0.866

3. ถ้าตำแหน่งที่ n+1 มีค่ามากกว่า 5 ให้ปัดขึ้น ตัวอย่างเช่นหากเราต้องการปัดตัวเลข 0.72387 ในตำแหน่งที่ 3 จะได้ 0.724

บทที่ 2

เวกเตอร์ของแรง

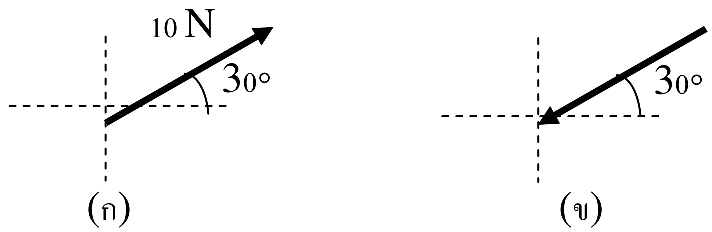
2.1 บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงผลของแรงที่กระทำต่ออนุภาค โดยการศึกษาการแทนแรงสองแรงหรือมากกว่าสองแรงด้วยแรงเพียงแรงเดียวที่เทียบเท่าแรงเดิม หรือที่เรียกกันว่าแรงลัพธ์ ซึ่งความหมายของคำว่าอนุภาคไม่ได้จำกัดว่าจะต้องเป็นวัตถุขนาดเล็กเท่านั้น แต่จะรวมถึงวัตถุแข็งเกร็งที่ขนาดและรูปร่างไม่มีผลต่อการแก้ปัญหาและแรงต่างๆที่กระทำต่อวัตถุได้กระทำที่จุดเดียวกัน

2.2 แรงที่กระทำต่ออนุภาค และผลลัพธ์ของแรงสองแรง

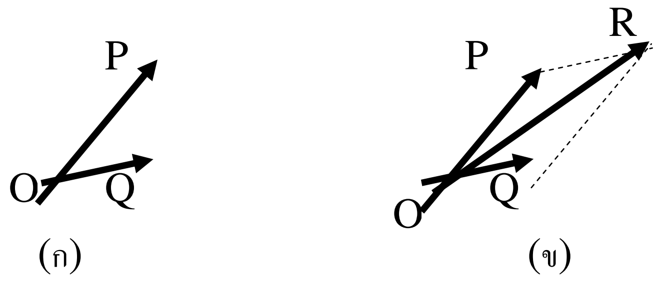
ผลของการกระทำของวัตถุหนึ่งต่อวัตถุอื่นๆ สามารถแทนได้ด้วยแรง โดยทั่วไปอาจแสดงลักษณะเฉพาะของแรงได้ด้วย จุดกระทำ ทิศทางและขนาดของแรง แต่เพราะว่าอนุภาคนั้นจะมีแรงต่างๆกระทำที่จุดเดียวกัน ดังนั้นการกำหนดแรงต่างๆในบทนี้จึงกำหนดได้โดยโดยระบุเพียงขนาดและทิศทางของแรงเท่านั้น

หน่วยที่ใช้วัดขนาดของแรงมีหลายหน่วยด้วยกันดังที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 1 ซึ่งทิศทางของแรงจะถูกกำหนดโดยแนวกระทำของแรงหรือเรียกสั้นๆว่า แนวแรง และ ทิศทางของแรง แนวแรงเป็นเส้นตรงที่บรรจุแรงนั้นอยู่ โดยมีมุมที่เส้นตรงนั้นกระทำกับแกนคงที่แกนหนึ่ง แรงที่มากระทำกับอนุภาคสามารถแทนได้ด้วยส่วนหนึ่งของแนวแรง โดยเราจะกำหนดระยะความยาวของของส่วนหนึ่งของแนวแรงนี้ ในส่วนของทิศทางที่แรงกระทำจะแสดงด้วยหัวลูกศร และในการกำหนดทิศทางของแรงต้องระบุทิศทางของแรงที่มากระทำต่ออนุภาคเสมอ ตัวอย่างเช่นรูปที่ 2.1 แสดงแรงสองแรงที่มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม



รูปที่ 2.1 แรงสองแรงที่มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม

จากรูปที่ 2.2ก แรงสองแรงคือ P และ Q กระทำต่ออนุภาค A ที่จุด O แรงทั้งสองสามารถเขียนแทนด้วยแรง R เพียงแรงเดียวที่สงผลต่ออนุภาคเหมือนกับที่แรง P และ Q กระทำดังรูปที่ 2.2ข



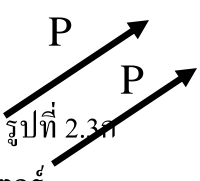
รูปที่ 2.2 การแทนแรงสองแรงด้วยแรงลัพธ์เพียงหนึ่งแรง

2.3 เวกเตอร์

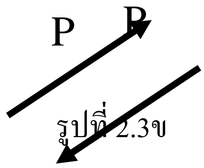
เวกเตอร์เป็นนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ประกอบไปด้วยขนาดและทิศทาง เวกเตอร์สามารถบวกกันได้โดยใช้กฎรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ในการแทนเวกเตอร์ด้วยรูปจะใช้ความยาวของเวกเตอร์แทนขนาดของเวกเตอร์มีหัวลูกศรเป็นตัวกำหนดทิศทางของเวกเตอร์ นอกจากนี้ขนาดของเวกเตอร์เป็นปริมาณสเกลาร์ การเรียกชื่อเวกเตอร์จะใช้สัญลักษณ์อักษรตัวหนา และระบุขนาดซึ่งเป็นปริมาณสเกลาร์โดยใช้สัญลักษณ์อักษรตัวเอียง

การใช้เวกเตอร์เพื่อแสดงแทนแรงที่กระทำต่ออนุภาค จะมีจุดกระทำที่ตำแหน่งของอนุภาค เวคเตอร์นี้เรียกว่า เวกเตอร์ตรึง (fixed vector) ซึ่งไม่สามารถย้ายตำแหน่งเวกเตอร์ไปกระทำที่ตำแหน่งอื่นได้ เว้นแต่จะเปลี่ยนแปลงสภาพเงื่อนไขของปัญหาบางประการให้สอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงนั้นก่อน ส่วนเวคเตอร์ที่สามารถย้ายตำแหน่งได้อย่างอิสระในสเปซ เวคเตอร์นี้เรียกว่าเวคเตอร์อิสระ (free vector)

จากรูปที่ 2.3ก เวคเตอร์ที่มีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกันจะมีค่าเท่ากันไม่ว่าจุดกระทำจะเป็นจุดเดียวกันหรือไม่ก็ตาม และจะแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ตัวเดียวกันแต่ถ้าเวกเตอร์สองเวกเตอร์มีขนาดเท่ากัน มีแนวขนานกันแต่มิทิศทางตรงกันข้ามเราเรียกว่าเป็นเวกเตอร์ที่เท่ากันแต่ทิศตรงข้ามดังรูปที่ 2.3ข



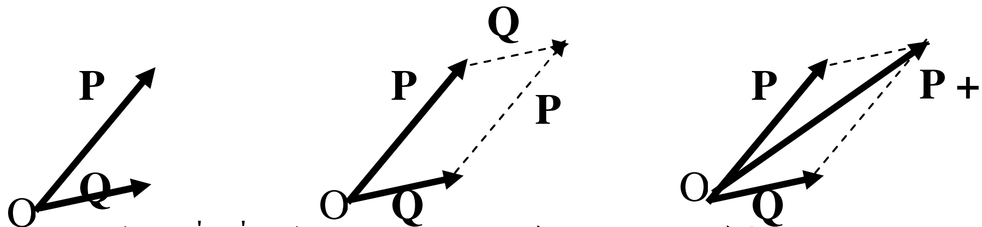
รูปที่ 2.3ก



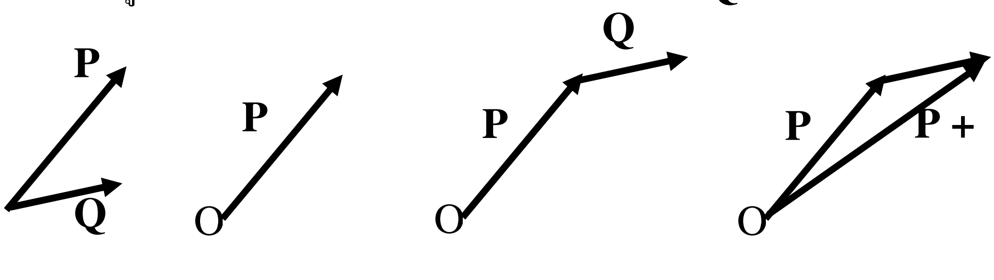
รูปที่ 2.3ข

2.4 การบวกเวกเตอร์

การบวกเวกเตอร์ **P** และ **Q** ทำได้โดยการสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเวกเตอร์ทั้งสองเป็นด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และเส้นทแยงมุมที่ผ่านจุดตัดของด้านทั้งสองแทนเวกเตอร์ และมีแนวอยู่ระหว่างแนวของเวกเตอร์ทั้งสอง คือผลรวมของเวกเตอร์ **P** และเวกเตอร์ **Q** ดังแสดงในรูปที่ 2.4 การบวกเวกเตอร์จะนำเวกเตอร์แรกไปบวกกับเวกเตอร์หลัง โดยนำเวกเตอร์หลังไปต่อที่หัวของเวกเตอร์ตัวแรก เวกเตอร์ลัพธ์ก็คือเวกเตอร์ที่ลากจากเวกเตอร์จุดเริ่มต้นของเวกเตอร์แรกถึงลูกศรของเวกเตอร์หลัง ดังแสดงในรูปที่ 2.5



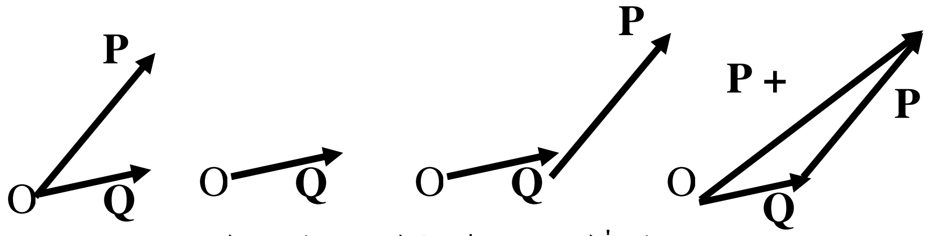
รูปที่ 2.4 การสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานของเวกเตอร์ **P** และเวกเตอร์ **Q**



O Q

รูปที่ 2.5 การบวกเวกเตอร์โดยการนำเวกเตอร์ทั้งสองมาต่อกัน

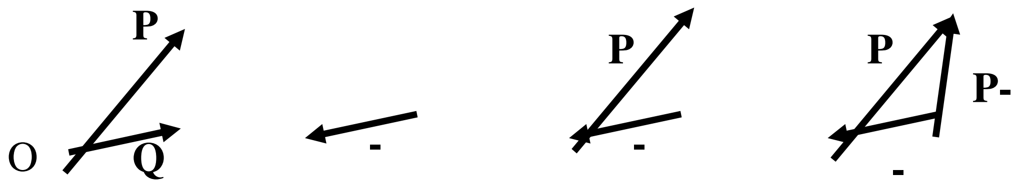
การบวกเวกเตอร์โดยการนำเวกเตอร์มาต่อกัน ไม่จำเป็นต้องกำหนดให้เวกเตอร์ **P** เป็นเวกเตอร์แรง แต่สามารถใช้เวกเตอร์ **Q** เป็นเวกเตอร์แรกได้เช่นกันดังตัวอย่างการบวกเวกเตอร์ **P+Q**ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 การบวกเวกเตอร์โดยใช้เวกเตอร์ **Q** เป็นเวกเตอร์เริ่มต้น

ในส่วนของการลบเวกเตอร์คือ การนำเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากันแต่ทิศตรงข้าม มาทำการบวกกันโดยบวกกันเหมือนกับเวกเตอร์ทั่วไป

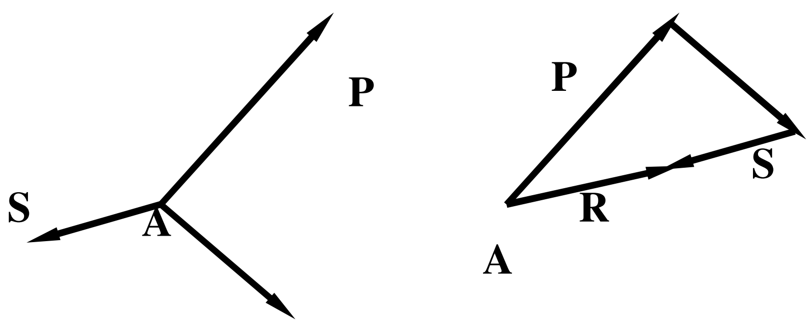
ตัวอย่าง การลบเวกเตอร์ **P-Q**



รูปที่ 2.7 แสดงขั้นตอนการลบเวกเตอร์

2.5 ผลรวมของเวกเตอร์หลายเวกเตอร์ที่กระทำต่ออนุภาค

อนุภาค A ถูกกระทำโดยมีแรงหลายๆแรงดังรูปที่ 2.8 ระบบแรงนี้มีความพิเศษคือแนวแรงทุกแรงตัดกันหรือพบกันที่จุก A หากแรงกระทำเป็นแรงร่วมระนาบโดยประกอบไปด้วยเวกเตอร์ของแรงสองแรงอาจบวกเวกเตอร์ของแรงที่กระทำต่ออนุภาคโดยใช้กฎรูปสามเหลี่ยม เนื่องจากการใช้กฎรูปสามเหลี่ยมสามารถประยุกต์ใช้ในกรณีที่มีเวกเตอร์ของแรงมากกว่าสองแรง โดยพิจารณาจากรูปสามเหลี่ยมที่ละรูป



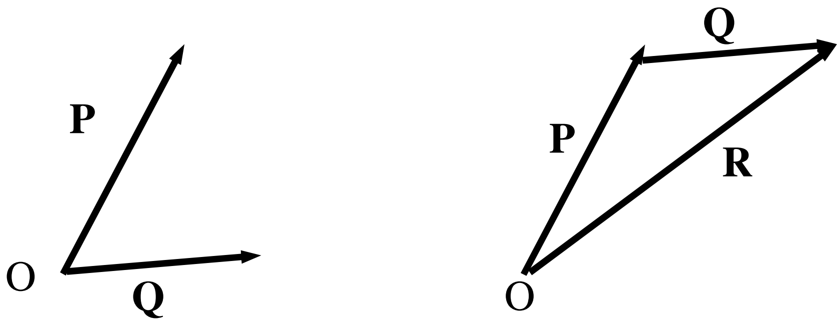
Q

Q

รูปที่ 2.8 การบวกกันของเวกเตอร์จากแรงย่อยสามแรง

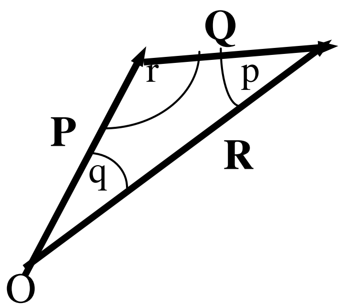
2.6 การหาแรงลัพธ์จากกฎของซายน์

จากที่กล่าวมาแล้วข้างต้นในเรื่องการบวกเวกเตอร์ย่อย P และ Q (รูปที่ 2.9ก) โดยนำเวกเตอร์แรกไปบวกกับเวกเตอร์หลัง โดยนำเวกเตอร์หลังไปต่อที่หัวของเวกเตอร์ตัวแรก เวกเตอร์ลัพธ์ R ก็คือเวกเตอร์ที่ลากจากเวกเตอร์จุดเริ่มต้นของเวกเตอร์แรกถึงลูกศรของเวกเตอร์หลังดังรูปที่ 2.9ข เราสามารถหาขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์โดยใช้กฎของซายน์



(ก) (ข)

รูปที่ 2.9 การบวกเวกเตอร์ P และเวกเตอร์ Q



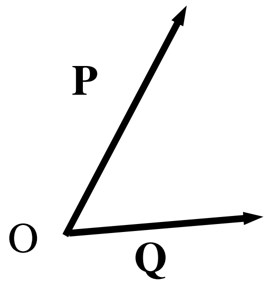
รูปที่ 2.10 แสดงมุมภายในด้านตรงข้ามของเวกเตอร์

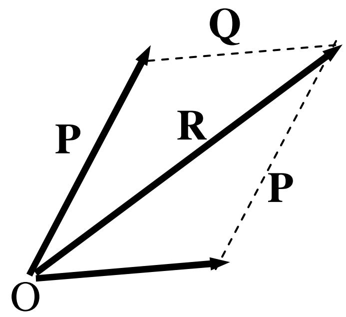
จากรูปที่ 2.10 กำหนดให้ p, q และ r แทนมุมภายในสามเหลี่ยมด้านตรงข้ามของเวกเตอร์ **P** ,**Q** และ **R** เราสามารถหาความสัมพันธ์ของเวกเตอร์ทั้งสามและมุมภายในจากกฎของซายน์ได้ดังนี้

$$\frac{P}{\sin p} = \frac{Q}{\sin q} = \frac{R}{\sin r}$$ กฎของซายน์

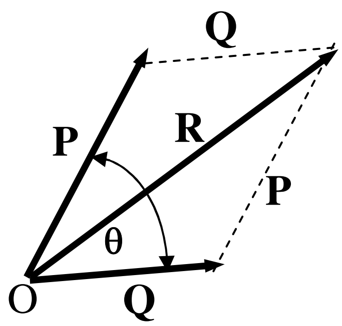
2.7 การหาแรงลัพธ์จากกฎของโคซายน์

การหาแรงลัพธ์ R โดยใช้กฎของโคซายน์สามารถทำได้โดยสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเวกเตอร์ทั้งสองเป็นด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และเส้นทแยงมุมที่ผ่านจุดตัดของด้านทั้งสองแทนผลรวมของเวกเตอร์ และมีแนวอยู่ระหว่างแนวของเวกเตอร์ทั้งสอง ดังแสดงในรูปที่ 2.11





รูปที่ 2.11 การบวกเวกเตอร์ P และเวกเตอร์ Q โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมด้านขนาน



รูปที่ 2.12 แสดงมุมระหว่างเวกเตอร์ P และ Q

จากรูปที่ 2.12 สามารถหาแรงลัพธ์ R จากกฎของโคซายน์ เมื่อ θ คือมุมระหว่างเวกเตอร์ **P**และเวกเตอร์ **Q**

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$$ กฎของโคซายน์

2.8 สรุปวิธีการหาเวกเตอร์ลัพธ์

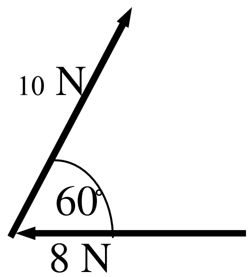
การหาเวกเตอร์ลัพธ์ที่เกิดจากเวกเตอร์ย่อยสองเวกเตอร์ วิธีที่ง่ายที่สุดคือ นำเวกเตอร์ย่อยสองเวกเตอร์มาวาดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานตามกฎสี่เหลี่ยมด้านขนานดังที่กล่าวมาแล้ว จากนั้นใช้กฎของโคซายน์เพื่อหาเวกเตอร์ลัพธ์

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$$ กฎของโคซายน์

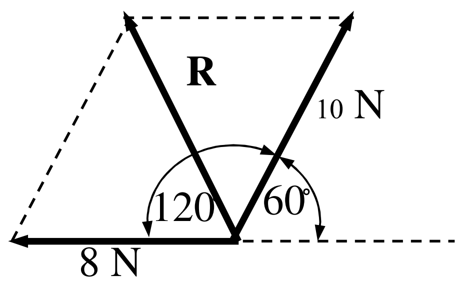
ในส่วนของมุมที่เวกเตอร์ลัพธ์กระทำกับเวกเตอร์ย่อยทั้งสอง สามาหาได้โดยใช้กฎของซายน์

$$\frac{P}{\sin p} = \frac{Q}{\sin q} = \frac{R}{\sin r}$$ กฎของซายน์

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาเวกเตอร์ลัพธ์ R ที่เกิดจากจากเวกเตอร์ย่อยสองเวกเตอร์กระทำดังภาพ



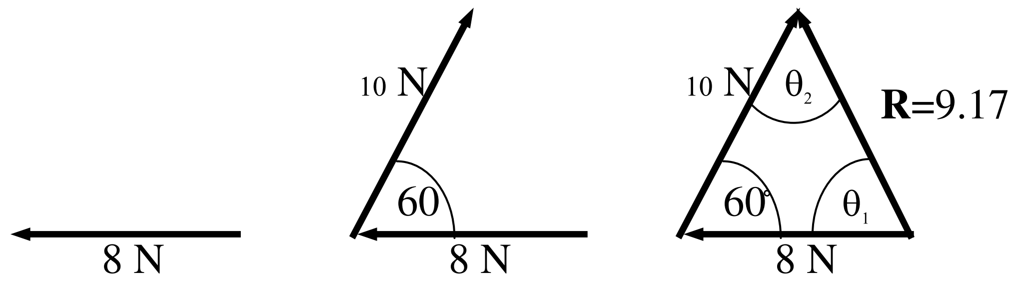
วิธีทำ วาดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยใช้กฎสี่เหลี่ยมด้านขนานจากเวกเตอร์ย่อยทั้งสอง



หาค่าแรงลัพธ์ R ใช้กฎของโคซายน์

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$$
$$= 8^2 + 10^2 + 2x8x10\cos 120^\circ$$
$$R^2 = 84$$
$$R = (84)^{0.5}$$
$$R = 9.17\ N$$

ในการมุมที่เวกเตอร์ลัพธ์กระทำจะใช้กฎของซายน์ในการหาค่าของมุม โดยทำการวาดรูปสามเหลี่ยมปิดที่เกิดจากการนำเวกเตอร์ย่อยทั้งสองมาต่อหัวต่อท้ายกันดังรูป



จากกฎของซายน์ $\dfrac{10}{\sin\theta_1} = \dfrac{8}{\sin\theta_2} = \dfrac{9.17}{\sin 60^\circ}$

หาค่ามุม θ_1 จาก $\dfrac{10}{\sin\theta_1} = \dfrac{9.17}{\sin 60^\circ}$

$$\sin\theta_1 = \frac{10\sin 60^\circ}{9.17}$$

$$\sin\theta_1 = 0.944$$

$$\theta_1 = \sin^{-1}0.944$$

$$\theta_1 = 70.7^\circ$$

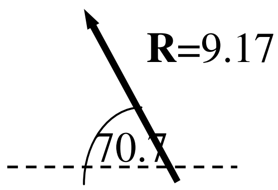
หาค่ามุม θ_2 จาก $\dfrac{8}{\sin\theta_2} = \dfrac{9.17}{\sin 60^\circ}$

$$\sin\theta_2 = \frac{8\sin 60}{9.17}$$

$$\sin\theta_1 = 0.756$$

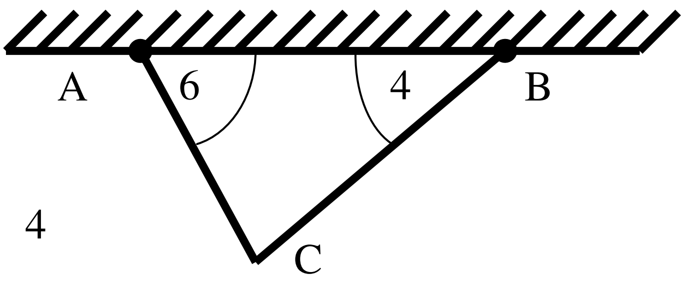
$$\theta_1 = \sin^{-1}0.756$$

$$\theta_1 = 49.1^\circ$$

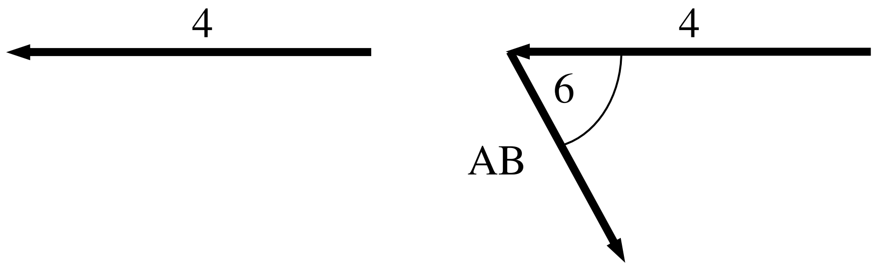


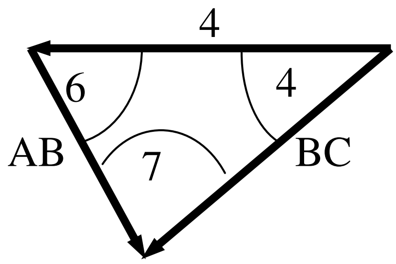
จะได้เวกเตอร์ลัพธ์ R ขนาด 9.17 N ทำมุม 70.7 ดังรูป Ans

ตัวอย่างที่ 2 จงหาแรงในชิ้นส่วน AB และ BC



วิธีทำ วาดรูปสามเหลี่ยมปิดที่เกิดจากการนำเวกเตอร์ย่อยทั้งสองมาต่อหัวต่อท้ายกันดังรูป





จากกฎของซายน์ $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{4}{\sin 75^\circ}$

หาค่าแรงในชิ้นส่วน AB จาก $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{4}{\sin 75^\circ}$

$$AB = \frac{4 \times \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}$$

$$AB = 2.93 \text{ kN}$$

หาค่าแรงในชิ้นส่วน BC จาก $\frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{4}{\sin 75^\circ}$

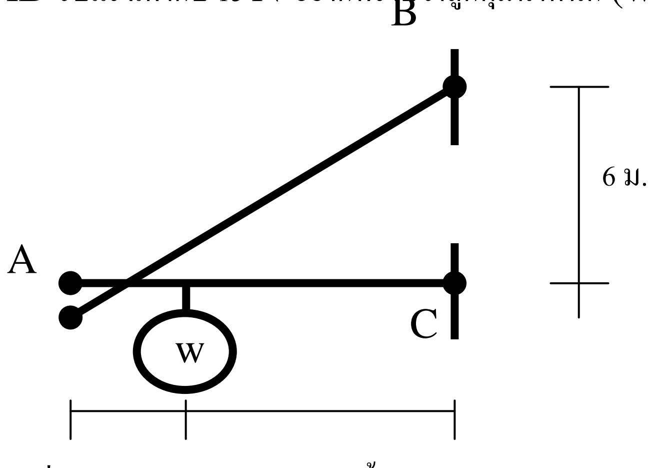
$$BC = \frac{4 \times \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}$$

$$BC = 3.59 \text{ kN}$$

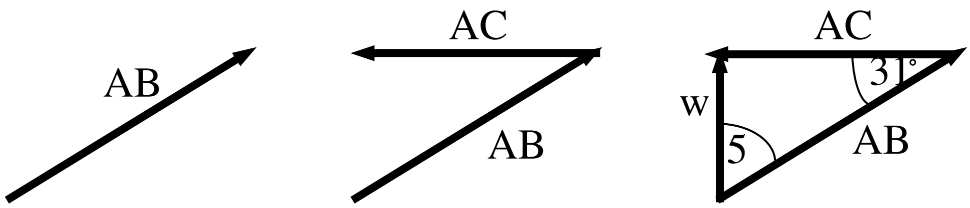
แรงในชิ้นส่วน AB และ BC มีค่าเท่ากับ 2.93 kN และ 3.59 kN

Ans

ตัวอย่างที่ 3 ถ้าชิ้นส่วน AB รับแรงเท่ากับ 15 N อยากทราบว่าลูกตุ้มน้ำหนัก (w) จะหนักกี่กิโลกรัม



วิธีทำ วาดรูปสามเหลี่ยมปิดที่เกิดจากการนำเวกเตอร์ย่อยทั้งสามมาต่อหัวต่อท้ายกันดังรูป



จากกฎของซายน์ $\dfrac{AB}{\sin 90^\circ} = \dfrac{AC}{\sin 59^\circ} = \dfrac{w}{\sin 31^\circ}$

แรงในชิ้นส่วน AB =15 N สามารถหาแรงแนวดิ่งเนื่องจากน้ำหนัก w ของลูกตุ้มได้จาก

$$\frac{15}{\sin 90^\circ} = \frac{w}{\sin 31^\circ}$$

$$w = \frac{15 \times \sin 31^\circ}{\sin 90^\circ}$$

$$w = 7.73 \text{ kN}$$

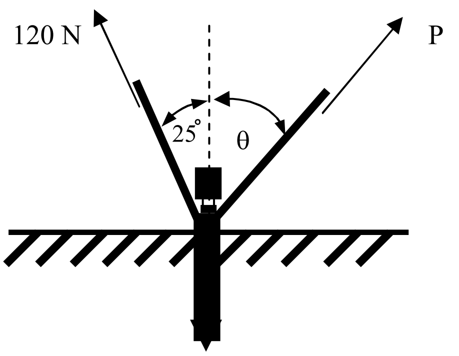
หาน้ำหนัก W ของลูกตุ้มจาก $m = \dfrac{w}{g}$

$$= \frac{7.73}{9.81}$$

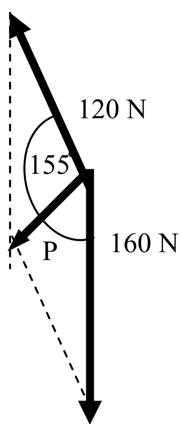
$$m = 0.788 \text{ กก.}$$

Ans

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> หมุดหลักถูกดึงจากพื้นดิน ด้วยเชือกสองเส้นดังรูป ถ้าแรงในเส้นเชือกเส้นหนึ่งมีค่าเท่ากับ 120 N จงหาขนาดของแรง P และมุม θ ที่ทำให้แรงลัพธ์ในแนวดิ่งของหมุดมีขนาด 160 N



<u>วิธีทำ</u> วาดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยใช้กฎสี่เหลี่ยมด้านขนานจากเวกเตอร์ย่อย 120 N และแรงลัพธ์ในแนวดิ่งของหมุด 160 N



หาค่าแรงลัพธ์ R ใช้กฎของโคซายน์เมื่อ ω มีค่าเท่ากับ $180^\circ - 15^\circ = 155^\circ$

$$P^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\omega$$

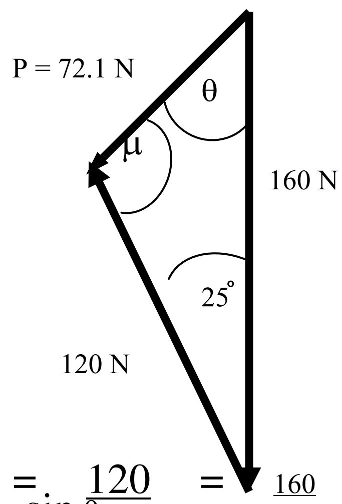
$$= 120^2 + 160^2 + 2x120x160\cos155^\circ$$

$$P^2 = 5198$$

$$P = (5198)^{0.5}$$

$$P = 72.1\ N$$

วาดรูปสามเหลี่ยมปิดจากการนำแรงย่อยทั้งสามมาต่อหัวต่อท้ายเพื่อหาค่ามุม θ ของแรง P



จากกฎของซายน์ $\dfrac{72.1}{\sin 25^\circ} = \dfrac{120}{\sin\theta} = \dfrac{160}{\sin\mu}$

หามุม θ ที่แรง P ทำให้แรงลัพธ์ในแนวดิ่งของหมุดมีขนาด 160 N

$$\frac{72.1}{\sin 25^\circ} = \frac{120}{\sin\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{120 \text{ x } \sin 25}{\sin 72.1^\circ}$$

$$\sin\theta = 0.703$$

$$\theta = \sin^{-1} 0.703$$

$$\theta = 44.7^\circ$$

แรง $P = 72.1\ N$ และมุม $\theta = 44.7^\circ$ จะทำให้แรงลัพธ์ในแนวดิ่งของหมุดมีขนาด 160 N

<u>Ans</u>

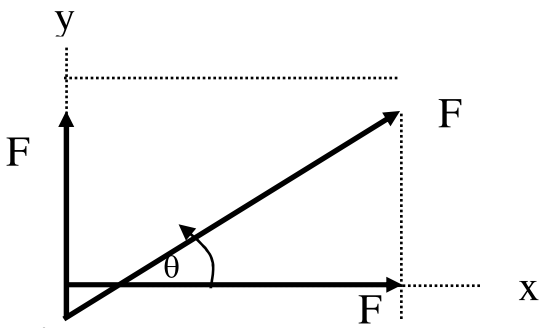
บทที่ 3
แรงในระบบสองมิติ

2.1 บทนำ

ในการแก้ปัญหาทางกลศาสตร์ มักพบเสมอว่าถ้าจะให้สะดวกในการพิจารณาแรงหลายแรงจะต้องทำการพิจารณาแรงทั้งหมดให้อยู่ในระนาบที่ตั้งฉากกัน ประกอบไปด้วยแรง 2 แรงตามแนวแกน x และแนวแกน y

2.2 แรงที่ย่อยที่ตั้งฉากกับแรงๆหนึ่ง

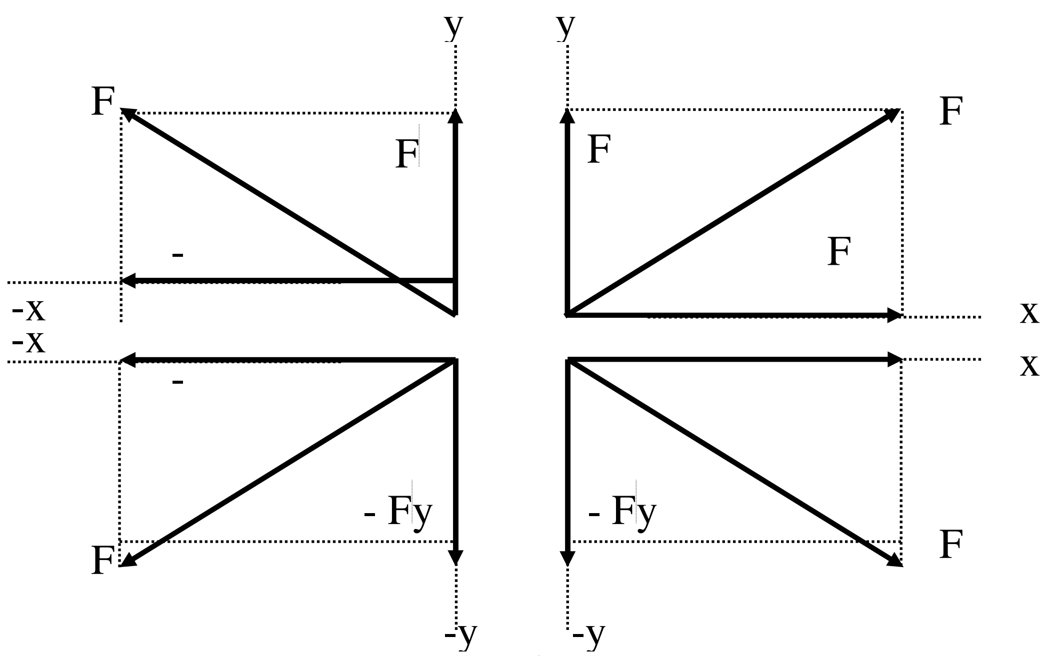
ในการหาแรงย่อยที่ตั้งฉากกันของแรง F สามารถหาได้โดยการลากเส้นจากปลายเวกเตอร์ F ให้ตั้งฉากกันกับแกน x และแกน y ดังรูปที่ 3.1 โดยแรง F ถูกแยกออกเป็นแรงย่อย Fx และแรงย่อย Fy



รูปที่ 3.1 การแยกแรง F ออกเป็นแรงย่อย Fx และแรงย่อย Fy

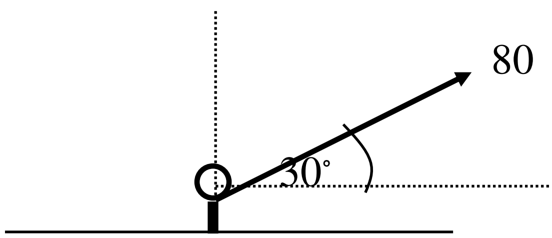
$$Fx = F\cos\theta \quad ; \quad Fy = F\sin\theta (3.1)$$

ขนาดของแรงย่อย Fx และแรงย่อย Fy เป็นส่วนประกอบสเกลาร์ของแรง F ในขณะที่แรงย่อยที่แท้จริง Fx และ Fy เป็นส่วนประกอบเวกเตอร์ของ F ซึ่งทั้งส่วนประกอบของสเกลาร์และส่วนประกอบของเวกเตอร์ของแรงย่อยนั้น อาจเรียกเพียงสั้นๆ ว่าแรงย่อยของ F จากรูปที่ 3.1 จะเห็นว่าถ้าวัดมุมในทิศทวนเข็มนาฬิกาจากแกน x ค่าของมุมจะเริ่มจาก 0 องศา ถึง 360 องศา ดังนั้นความสัมพันธ์ของสมการ 3.1 สเกลาร์ Fx หรือ Fy อาจมีค่าเป็นบวกหรือลบก็ได้ โดย Fx จะมีค่าเป็นบวกเมื่อแรง F อยู่ในควอทแดรนท์ที่ 1 หรือควอทแดรนท์ที่ 4 และ Fx จะมีค่าเป็นลบเมื่อแรง F อยู่ในควอทแดรนท์ที่ 2 หรือควอทแดรนท์ที่ 3 ในทำนองเดียวกัน Fy จะมีค่าเป็นบวกเมื่อแรง F อยู่ในควอทแดรนท์ที่ 1 หรือควอทแดรนท์ที่ 2 และ Fy จะมีค่าเป็นลบเมื่อแรง F อยู่ในควอทแดรนท์ที่ 3 หรือควอทแดรนท์ที่ 4 ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 เครื่องหมาย Fx และ Fy ในควอทแดรนท์ทั้ง 4

ตัวอย่างที่ 1 แรง 80 N กระทำกับสลักเกลียวดังรูป จงหาแรงย่อยที่กระทำต่อสลักเกลียวในแนวแกน x และแกน y



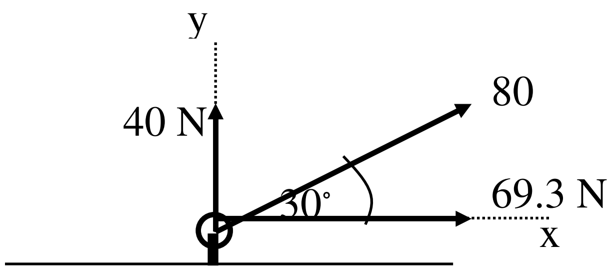
วิธีทำ

จากสมการที่ 3.1 $Fx = F\cos\theta$ และ $Fy = F\sin\theta$

$$Fx = F\cos\theta \quad ; \quad Fy = F\sin\theta$$

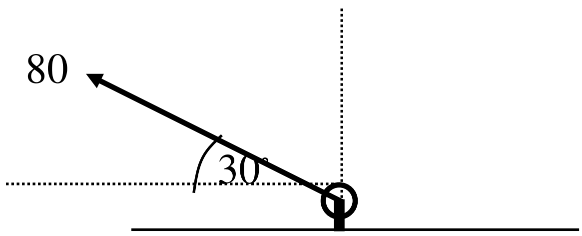
= 80 cos 30° ; = 80 sin 30°

= 69.3 N ; = 40 N



ดังนั้นแรง F สามารถเขียนในรูปแรงย่อยที่ตั้งฉากกันในแนวแกน x และแกน y จะได้ Fx = 69.3 N และ Fy = 40 N ดังรูป

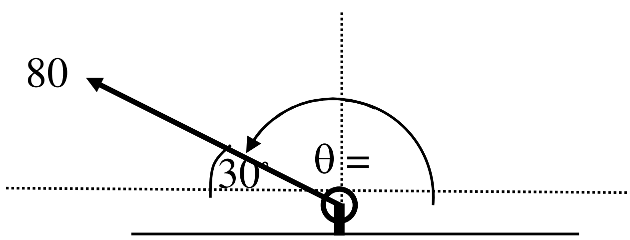
ตัวอย่างที่ 2 แรง 80 N กระทำกับสลักเกลียวดังรูป จงหาแรงย่อยที่กระทำต่อสลักเกลียวในแนวแกน x และแกน y



วิธีทำ

จากสมการที่ 3.1 มุม θ จะวัดมุมในทิศทวนเข็มนาฬิกาจากแกน x

ดังนั้น $\theta = 60^\circ + 90^\circ = 120^\circ$

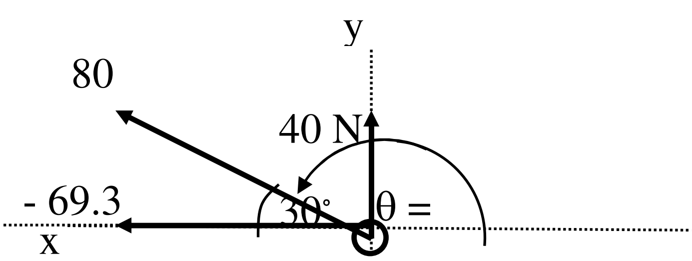


จากสมการที่ 3.1 $F_x = F\cos\theta$ และ $F_y = F\sin\theta$

$F_x = F\cos\theta$; $F_y = F\sin\theta$

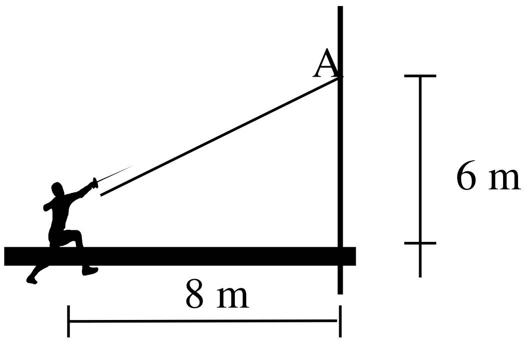
$= 80\cos 150^\circ$; $= 80\sin 150^\circ$

$= -69.3$ N ; $= 40$ N



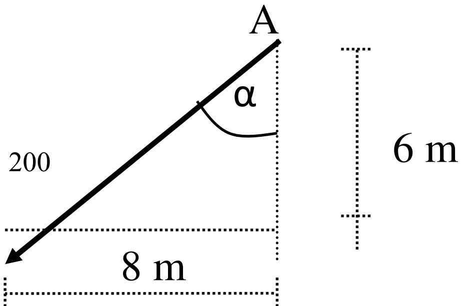
ดังนั้นแรง F สามารถเขียนในรูปแรงย่อยที่ตั้งฉากกันในแนวแกน x และแกน y จะได้ $F_x = -69.3$ N และ $F_y = 40$ N ดังรูป

ตัวอย่างที่ 3 ชายคนหนึ่งออกแรง 200 N ดึงเชือกที่ติดอยู่กับกำแพงดังรูปจงหาแรงย่อยที่กระทำต่อกำแพงในแนวแกน x และแกน y

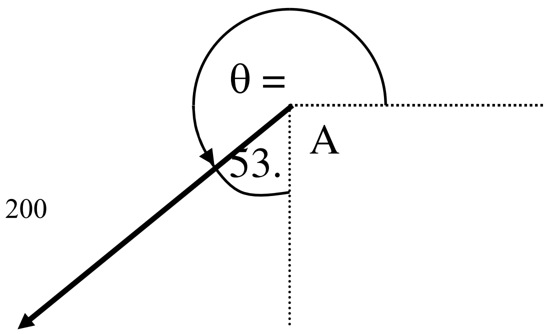


วิธีทำ

พิจารณาแรงที่กระทำกับกำแพงที่จุด A จะได้



หาค่ามุม $\alpha = \tan^{-1}(8/6) = 53.1^\circ$



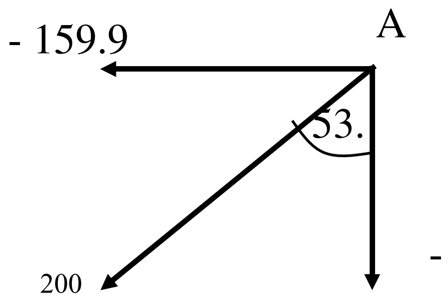
จะได้ $\theta = 270^\circ - 53.1^\circ = 216.9^\circ$

จากสมการที่ 3.1 $F_x = F\cos\theta$ และ $F_y = F\sin\theta$

$F_x = F\cos\theta$; $F_y = F\sin\theta$

$= 200\cos 216.9^\circ$; $= 200\sin 216.9^\circ$

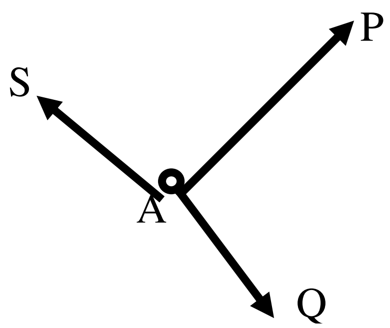
$= -159.9$ N ; $= -120.1$ N



ดังนั้นแรง F สามารถเขียนในรูปแรงย่อยที่ตั้งฉากกันในแนวแกน x และแกน y จะได้ Fx = - 159.9 N และ Fy = -120.1 N ดังรูป

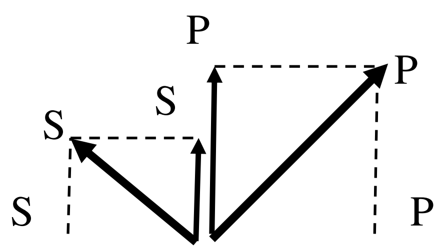
2.3 การบวกแรงโดยการรวมแรงย่อยในแนวแกน x และแนวแกน Y

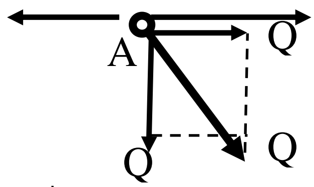
ในการหาแรงย่อยที่ตั้งฉากกันของแรง F สามารถหาได้โดยใช้กฎรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จากกฎนี้พบว่าสามารถแรงย่อยนำมาบวกกันได้โดยวิธีเชิงกราฟ เมื่อต้องบวกแรงทากกว่าสองแรงขึ้นไปจะเป็นการยุ่งยากมากที่จะหาผลเฉลยเชิงตรีโกณมิติหรือหาผลเฉลยโดยใช้กฎของซายน์ ซึ่งในกรณีดังกล่าวถ้าต้องการหาแรงลัพธ์ของแรงมากกว่า 2 แรงนิยมแยกแรงแต่ละแรงออกเป็นแรงย่อยที่ตั้งฉากกันในแนวแกน x และแนวแกน y แล้วรวมแรงย่อยทุกแรงในแนวแกน x ให้เหลือเพียงแรงเดียวได้เป็นแรง Rx และ รวมแรงย่อยทุกแรงในแนวแกน y ให้เหลือเพียงแรงเดียวได้เป็นแรง Ry โดยที่แรง Rx และแรง Ry จะเป็นผลรวมของแรงย่อยที่ตั้งฉากกันในแนวแกน x และแนวแกน y



รูปที่ 3.3 แรง P , Q และ S กระทำที่จุด A

พิจารณาแรง 3 แรงกระทำที่จุด A ดังรูปที่ 3.3 การหาแรงลัพธ์ R ของแรงทั้งสามโดยใช้การบวกเวกเตอร์จะมีความยุ่งยากในการพิจารณาดังนั้นจึงต้องพิจารณาแรงทั้งสามซึ่งประกอบไปด้วยแรง P , Q และ S ออกเป็นแรงย่อยที่ตั้งฉากกันในแนวแกน x และ y ดังรูปที่ 3.4 จะได้





รูปที่ 3.4 แยกแรง P , Q และ S ออกเป็นแรงย่อยตามแนวแกน x และ y

จากความสัมพันธ์

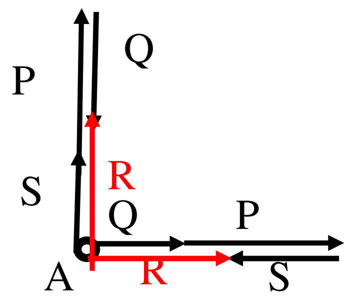
$$R = P + Q + S \text{ และ } R = Rx + Ry$$

ดังนั้นเมื่อพิจารณาแรงย่อยของแรงลัพธ์ R ตามแนวแกนx และ y จะได้

$$Rx = Px + Qx + Sx$$

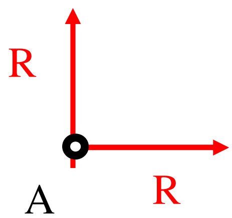
$$Ry = Py + Qy + Sy$$

เมื่อแยกแรง P , Q และ S ออกเป็นแรงย่อยตามแนวแกน x และ y แล้วจะทำการรวมแรงย่อย Px , Qx และ Sx เป็นแรงลัพธ์ Rx ตามแนวแกน x และทำการรวมแรงย่อย Py , Qy และ Sy เป็นแรงลัพธ์ Ry ดังภาพที่ 3.5



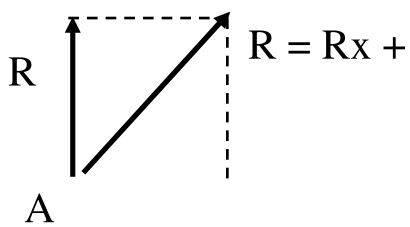
รูปที่ 3.5 รวมแรงย่อยตามแนวแกน x และ y

ผลที่ได้จากการรวมแรงย่อยทั้งหมดตามแนวแกน x และแนวแกน y ก็คือจะเหลือเพียงแรงลัพธ์ Rx ตามแนวแกน x และแรงลัพธ์ Ry ตามแนวแกน y เพียงสองแรงดังรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 แรงลัพธ์ Rx และแรงลัพธ์ Ry

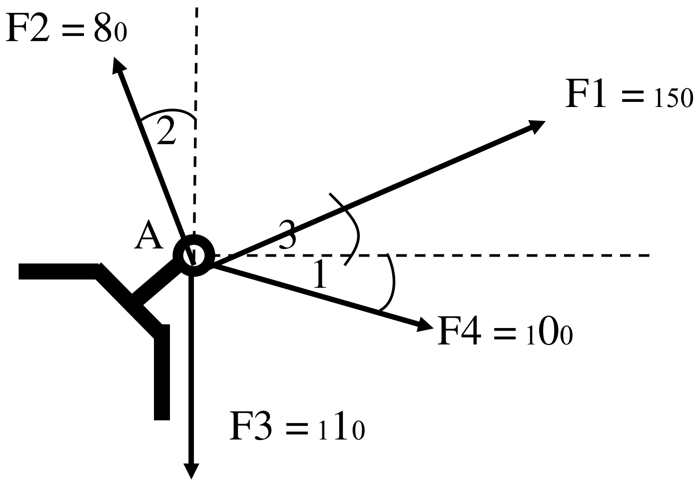
เมื่อรวมแรงทั้งหมดจนเหลือเพียงแรงลัพธ์ Rx และแรงลัพธ์ Ry ก็สามารถใช้ความสัมพันธ์ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าคำนวณหาแรงลัพธ์ R ได้ดังรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 แรงลัพธ์ R ที่เกิดจากการรวมแรงลัพธ์ Rx และแรงลัพธ์ Ry

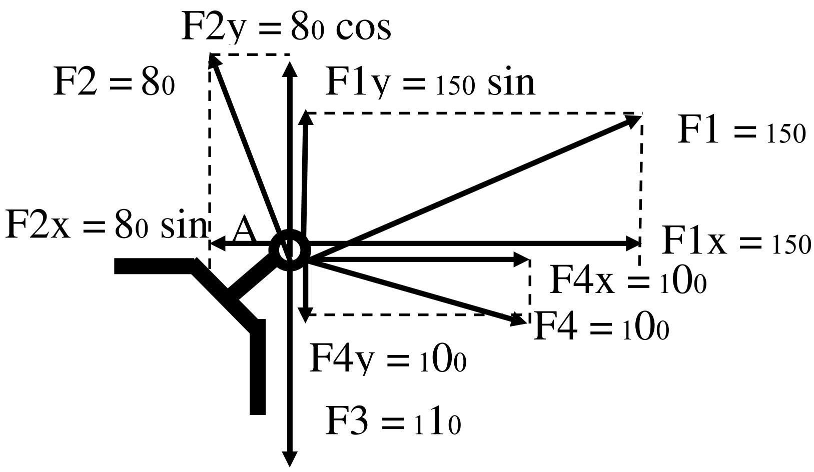
ตัวอย่างที่ 4 จงหาแรงลัพธ์ของแรงสี่แรงที่กระทำต่อสลักเกลียว ที่จุด A ดังรูป

<u>วิธีที่ 1</u>

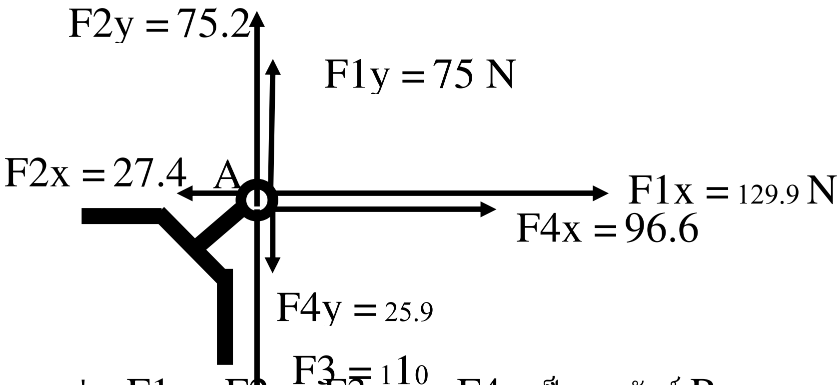


วิธีทำ

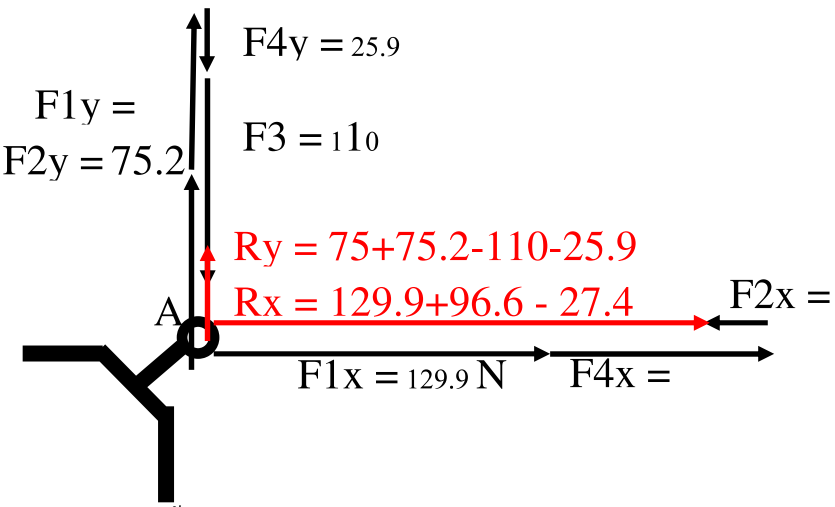
แยกแรง F1 , F2 , F3 และ F4 ออกเป็นแรงย่อยตามแนวแกน x และ y



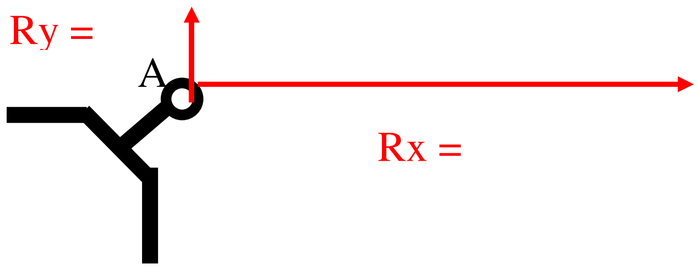
จะได้



ทำการรวมแรงย่อย F1x , F2x , F3x และ F4x เป็นแรงลัพธ์ Rx และรวมแรงย่อย F1y , F2y , F3yและ F4y เป็นแรงลัพธ์ Ry ดังภาพ



ผลที่ได้จากการรวมแรงย่อยทั้งหมดตามแนวแกน x และแนวแกน y ก็คือจะเหลือเพียงแรงลัพธ์ Rx ตามแนวแกน x และแรงลัพธ์ Ry ตามแนวแกน y เพียงสองแรง



เมื่อรวมแรงทั้งหมดจนเหลือเพียงแรงลัพธ์ Rx และแรงลัพธ์ Ry ก็สามารถใช้ความสัมพันธ์ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าคำนวณหาแรงลัพธ์ R ได้ดังรูป

จาก $R^2 = (Rx^2 + Ry^2)$

$= (199.1^2 + 14.3^2)$

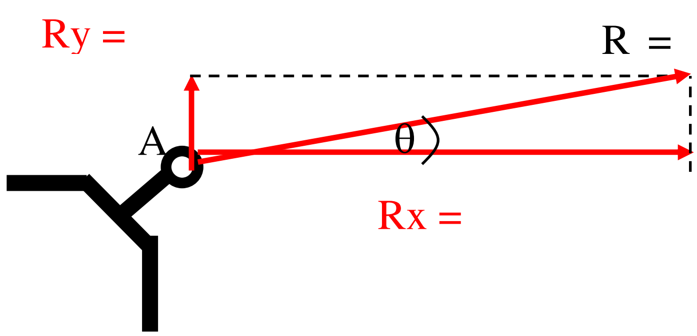
$R^2 = 39900$

$R = 199.7$ N

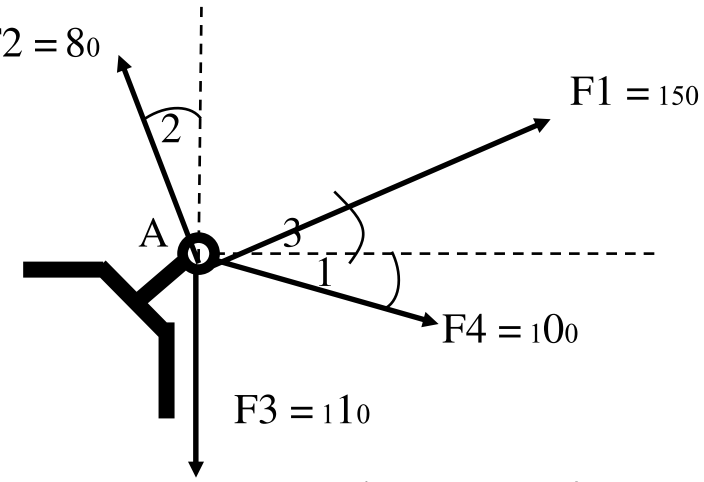
หามุม θ จาก $\theta = \tan^{-1}(Ry/Rx)$

$= \tan^{-1}(14.3/199.2)$

$\theta = 4.11^{\circ}$



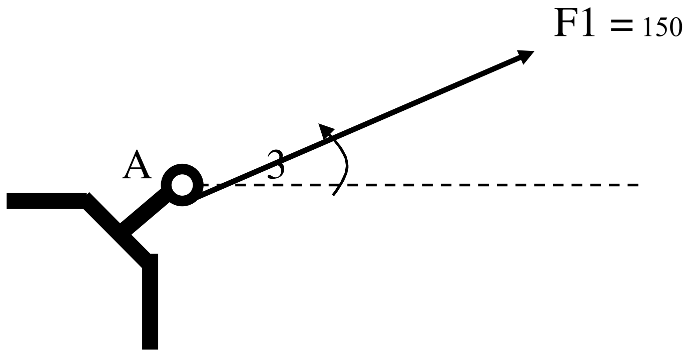
วิธีที่ 2



พิจารณาแรงย่อยแต่ละแรงและมุมของแรงย่อยโดยวัดจากแกน x ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

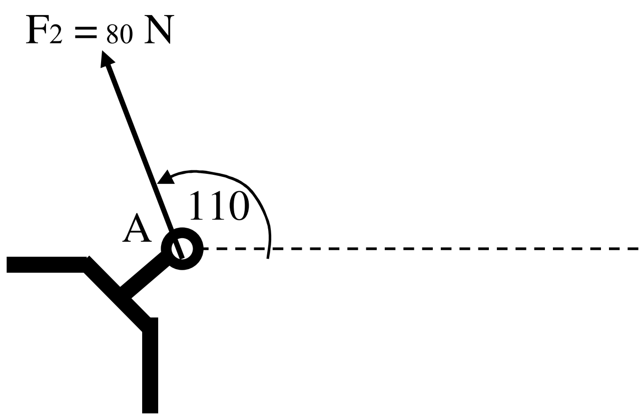
พิจารณาแรง F1

มุมภายในของแรง F1 มีค่าเท่ากับ 30°



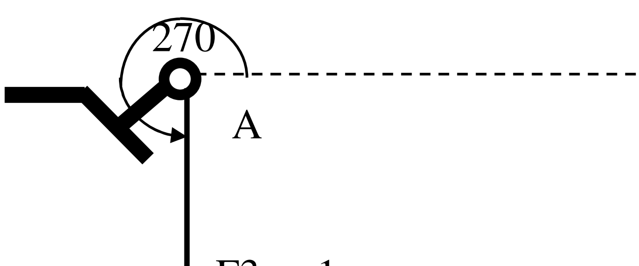
พิจารณาแรง F2

มุมภายในของแรง F2 มีค่าเท่ากับ 90° + 20° = 110°



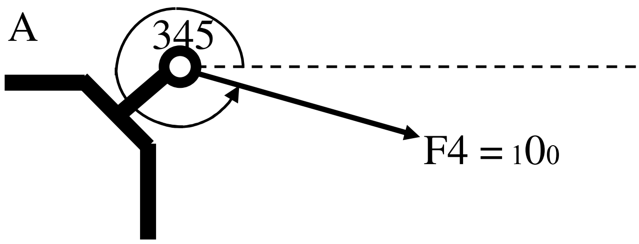
พิจารณาแรง F3

มุมภายในของแรง F2 มีค่าเท่ากับ 270°



พิจารณาแรง F4

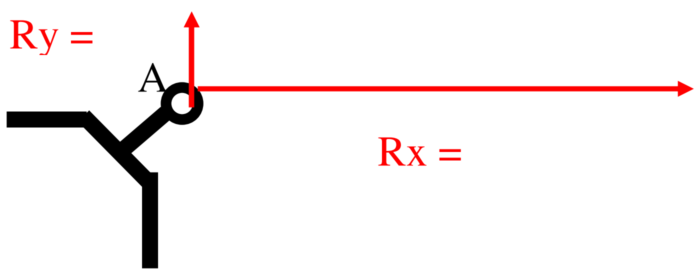
มุมภายในของแรง F4 มีค่าเท่ากับ $360^\circ - 15^\circ = 345^\circ$



หาแรงย่อยในแนวแกน x และแรงย่อยในแนวแกน y ได้โดยแสดงในตาราง

แรง	ขนาดของแรง (N)	มุมของแรง (องศา)	แรงย่อยในแนวแกน x (N)	แรงย่อยในแนวแกน y (N)
F1	150	30°	$150 \cos 30^\circ = 129.9$	$150 \sin 30^\circ = 75$
F2	80	110°	$80 \cos 110^\circ = -27.4$	$80 \sin 110^\circ = 75.2$
F3	110	270°	$110 \cos 270^\circ = 0$	$110 \sin 270^\circ = -110$
F4	100	345°	$100 \cos 345^\circ = 96.6$	$100 \sin 345^\circ = -25.9$
		รวม	$129.9 - 27.4 + 96.6 =$ 199.2	$75 + 75.2 - 110 - 25.9 =$ 14.3

ผลที่ได้จากการรวมแรงย่อยทั้งหมดตามแนวแกน x และแนวแกน y ก็คือจะเหลือเพียงแรงลัพธ์ Rx ตามแนวแกน x และแรงลัพธ์ Ry ตามแนวแกน y เพียงสองแรง



เมื่อรวมแรงทั้งหมดจนเหลือเพียงแรงลัพธ์ Rx และแรงลัพธ์ Ry ก็สามารถใช้ความสัมพันธ์ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าคำนวณหาแรงลัพธ์ R ได้ดังรูป

จาก $R^2 = (Rx^2 + Ry^2)$

$$= (199.1^2 + 14.3^2)$$

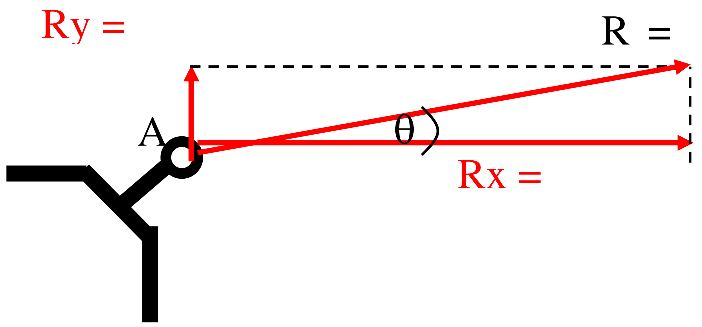
$$R^2 = 39900$$

$$R = 199.7 \text{ N}$$

หามุม θ จาก $\theta = \tan^{-1}(Ry/Rx)$

$$= \tan^{-1}(14.3/199.2)$$

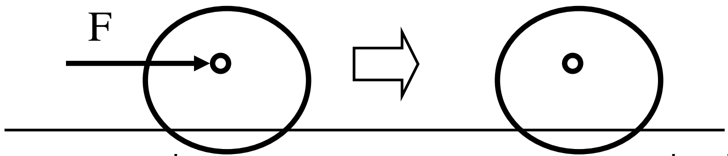
$$\theta = 4.11^\circ$$



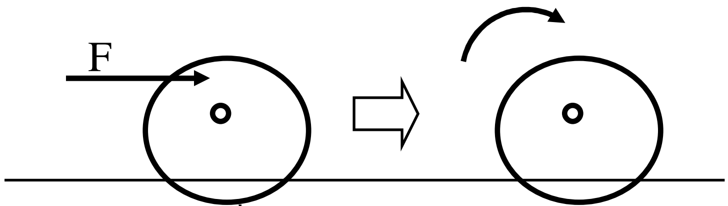
บทที่ 4
โมเมนต์

4.1 บทนำ

เมื่อมีแรงมากระทำกับวัตถุจะส่งผลให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่ หรือเกิดการหมุน ซึ่งถ้าแรงลัพธ์กระทำผ่านจุดศูนย์กลามวลของวัตถุแล้ววัตถุจะเกิดการเคลื่อนที่เพียงอย่างเดียว แต่ถ้ามีแรงกระทำมาผ่านศูนย์กลางมวล วัตถุจะเกิดการเคลื่อนที่ไปพร้อมๆกับการหมุนดังรูปที่ 4.1 - 4.2 แรงที่ทำให้วัตถุเกิดการหมุนนี้เราเรียกว่า โมเมนต์



รูปที่ 4.1 แรง F กระทำกับวัตถุที่ตำแหน่งศูนย์กลางมวลทำให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่ ทางด้านหน้า



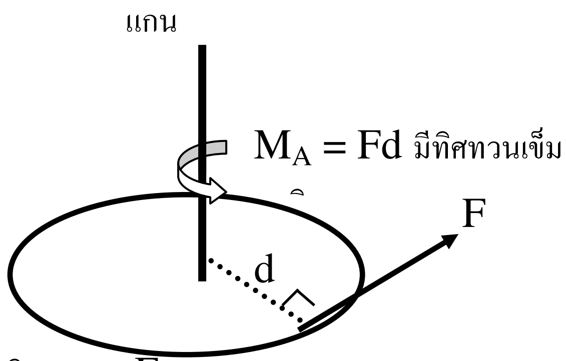
รูปที่ 4.2 แรง F ไม่ได้กระทำกับวัตถุที่ตำแหน่งศูนย์กลางมวลส่งผลให้วัตถุเกิดการหมุน

4.2 โมเมนต์ของแรงหนึ่งแรงรอบแกนหนึ่งแกน

ความพยายามของแรงๆหนึ่งที่จะทำให้วัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนๆหนึ่ง วัดได้โดยโมเมนต์ของแรงรอบแกนนั้น โมเมนต์ M_A ของแรง F รอบแกนๆหนึ่งที่ผ่านจุด A หรือที่จะกล่าวสั้นๆว่าโมเมนต์ของแรง F รอบแกน A ซึ่งนิยามได้ว่าเป็นผลคูณของขนาดแรง F ของแรงนั้นกับระยะทางตั้งฉาก d ซึ่งระยะ d วัดจากแกนตามแนวตั้งฉากแกน A ถึงแนวกระทำของแรง F

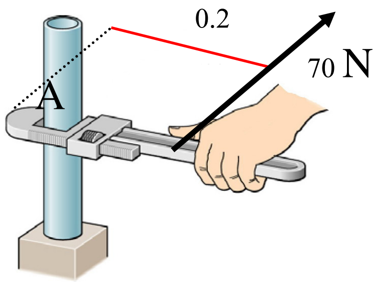
$$M_A = Fd$$

โมเมนต์เกิดจากปริมาณของแรงคูณกับระยะทาง ดังนั้นในระบบหน่วย SI ซึ่งระบุแรงเป็น นิวตัน (N) และระยางค์เป็นเมตร (m) โมเมนต์ของแรงจึงมีหน่วยเป็น นิวตัน.เมตร (N.m) โมเมนต์ของแรงไม่ได้มีเพียงขนาดเพียงอย่างเดียวยังประกอบด้วยทิศทางของโมเมนต์อีกด้วย โมเมนต์ของแรงจะมีทิศทางตามเข็มนาฬิกาหรือทวนเข็มนาฬิกาก็ได้ขึ้นอยู่กับตำแหน่งสัมพัทธ์ของแรงเทียบกับแกนดังรูปที่ 4.3 จะเห็นว่าโมเมนต์ของแรง F รอบแกน A มีทิศตามเข็มนาฬิกา โมเมนต์ของแรงสามารถนำมาบวกกันเชิงพีชคณิตเหมือนกับปริมาณทั่วไปได้ถ้าเรากำหนดเครื่องหมายหรือทิศทางของโมเมนต์ให้อยู่ในระบบเดียวกัน ซึ่งโดยทั่วไปแล้วมักจะกำหนดให้โมเมนต์ที่มีทิศทางทวนเข็มนาฬิกามีทิศทางเป็นบวก และโมเมนต์ที่มีทิศทางตามเข็มนาฬิกามีทิศทางเป็นลบ



รูปที่ 4.3 โมเมนต์ที่เกิดจากแรง F

ตัวอย่างที่ 1 โมเมนต์ที่เกิดขึ้นกับท่อประปาเหล็กจะมีค่าเท่าไรเมื่อออกแรงขันประแจโดยใช้แรงขนาด 70 นิวตันดังรูป



วิธีทำ

จากนิยามของโมเมนต์ผลคูณของขนาดแรง F ของแรงนั้นกับระยะทางตั้งฉาก d ซึ่งระยะ d วัดจากแกนตามแนวตั้งฉากแกน A ถึงแนวกระทำของแรง F

จะได้ F = 70 N

d = 0.2 m

ดังนั้น โมเมนต์ $M_A = Fd$

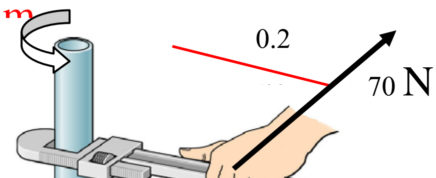
$= 70 \times 0.2$

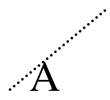
$= 14$ N.m ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

จะได้

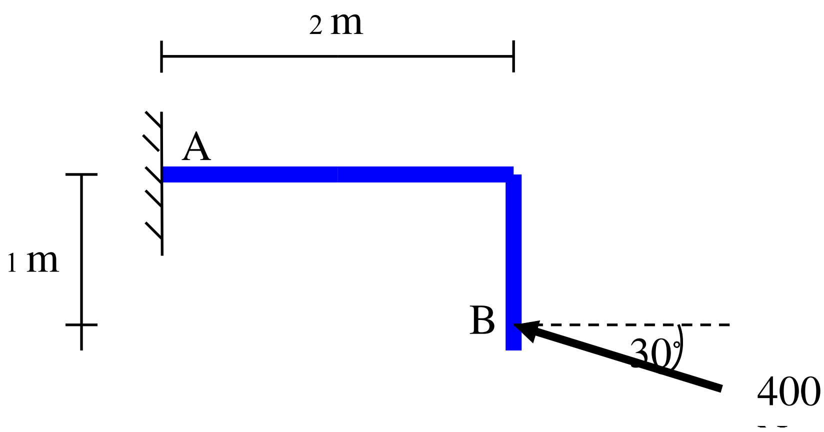
M_A = 14

N.m



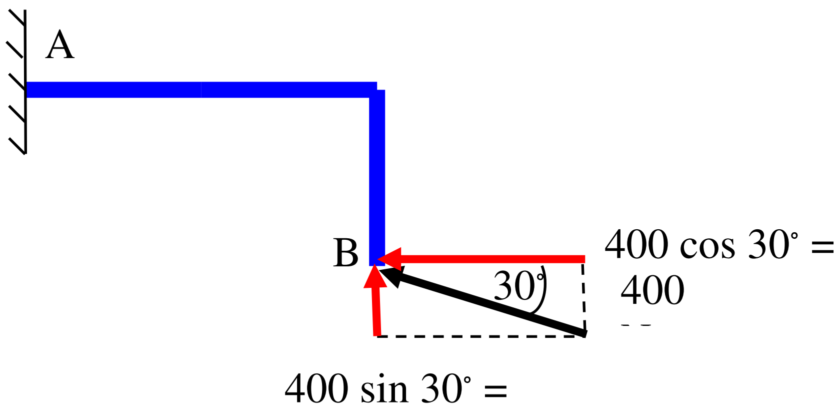


ตัวอย่างที่ 2 คานดังรูปถูกแรงขนาด 400 N กระทำที่จุด B ทำมุม 30° กับแกน x จงหาโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่จุด A

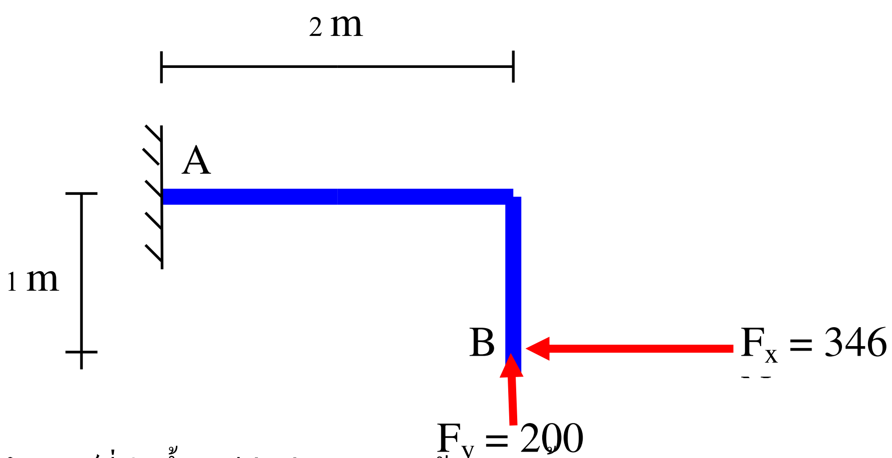


วิธีทำ

แยกแรง 400 N ที่จุด B ออกเป็นแรงย่อยสองแรงในแนวแกน X และแนวแกน y



จะได้

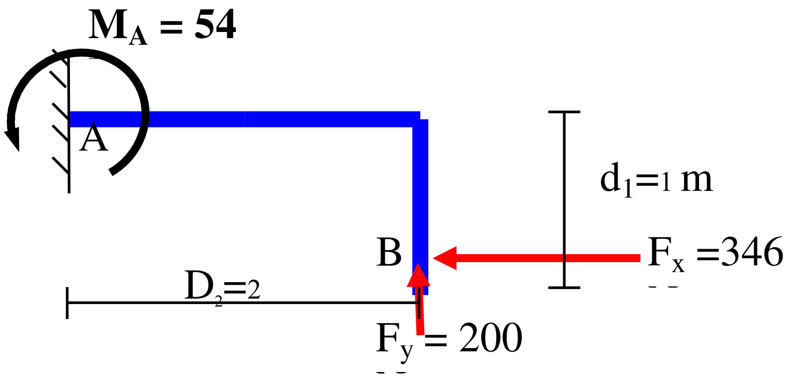


ดังนั้นโมเมนต์ที่เกิดขึ้นจะมีค่าเท่ากับแรงคูณด้วยระยะตั้งฉากกับแนวแรง

$M_A = F_x.d_1 + F_y.d_2$ กำหนดให้ทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็น +

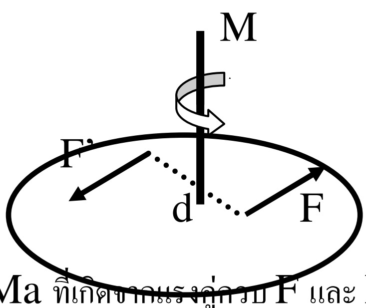
$= -346 \times 1 + 200 \times 2$

$M_A = 54$ N.m ทิศทวนเข็มนาฬิกา



4.3 โมเมนต์ของแรงคู่ควบ

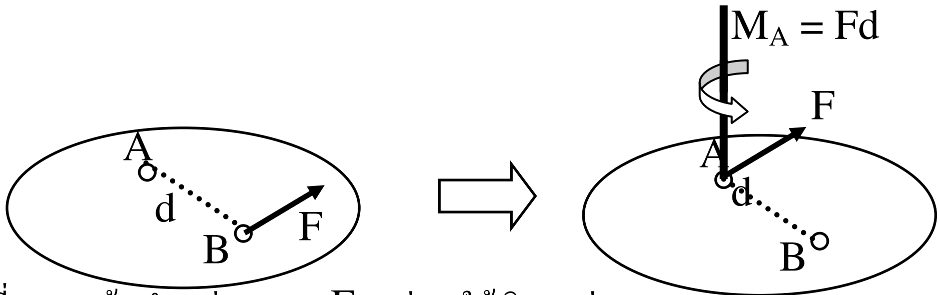
แรงสองแรงที่มีขนาดเท่ากันแนวกระทำของแรงขนานกันแต่มีทิศทางนองแรงตรงกันข้าม ซึ่งจะประกอบกันเป็น “แรงคู่ควบ” แรงสองแรงที่มีลักษณะดังกล่าวได้แก่ F และ F’ ดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 โมเมนต์ Ma ที่เกิดจากแรงคู่ควบ F และ F’

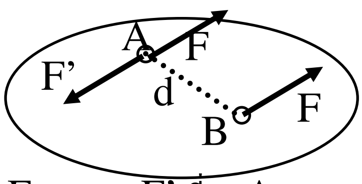
4.3 การแยกแรงหนึ่งแรงออกเป็นแรงหนึ่งซึ่งกระทำที่จุดหนึ่งที่กำหนดไว้และแรงคู่ควบหนึ่งชุด

วัตถุแข็งเกร็งมีแรง F มากระทำที่จุด B ดังรูปที่ 4.5 เราสามารถย้ายแรง F มาอยู่ที่จุด A ซึ่งห่างจากจุด A ในทิศตั้งฉากกับแรง F เป็นระยะทาง d ผลจากการเปลี่ยนตำแหน่งของแรง F จะส่งผลให้เกิดโมเมนต์ของแรงคู่ควบ M ซึ่งมีขนาดเท่ากับ แรง F คูณกับระยะ d ดังรูปที่ 4.5



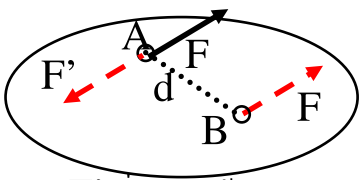
รูปที่ 4.5 การย้ายตำแหน่งของแรง F จะส่งผลให้เกิดแรงคู่ควบ

การแยกแรงหนึ่งแรงออกเป็นแรงหนึ่งซึ่งกระทำที่จุดหนึ่งที่กำหนดไว้และแรงคู่ควบหนึ่งชุด สามารถทำได้โดยเพิ่มแรง F และแรง F' (แรงที่มีขนาดเท่ากับแรง F แต่มีทิศทางตรงกันข้าม) ที่จุด A ดังรูปที่ 4.6



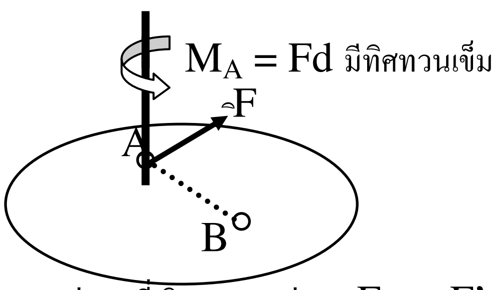
รูปที่ 4.6 การใส่แรง F และแรง F' ที่จุด A

พิจารณาแรง F ที่จุด A และแรง F' ที่จุด B ดังรูปที่ 4.7 แรงทั้งสองนี้จะส่งผลให้เกิดแรงคู่ควบระหว่างจุด A และจุด B



รูปที่ 4.7 แรง F และแรง F' ที่ส่งผลให้เกิดแรงคู่ควบ

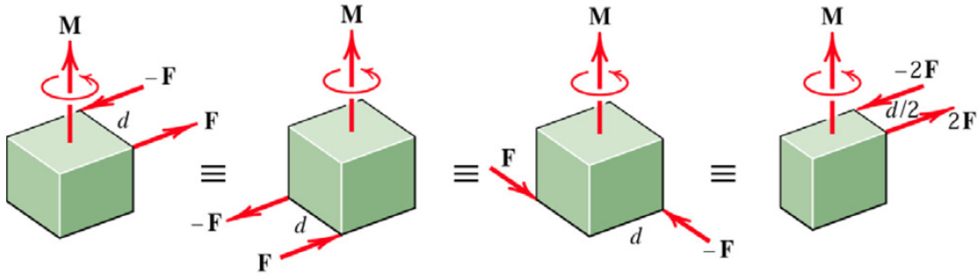
ผลของแรงคู่ควบ F และ F' ที่จุด B และจุด A โดยมีระยะตั้งฉากระหว่างแนวแรงทั้งสองเป็นระยะ d จะส่งผลให้เกิดโมเมนต์ของแรงคู่ควบ $M_A = Fd$ ดังรูปที่ 4.8



รูปที่ 4.8 โมเมนต์ของแรงคู่ควบที่เกิดจากแรงคู่ควบ F และ F'

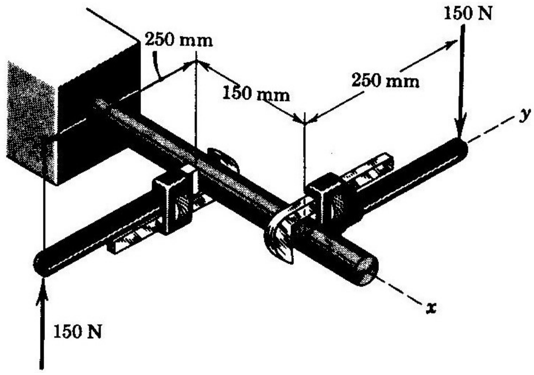
4.4 โมเมนต์ของแรงคู่ควบที่เท่ากัน

โมเมนต์ของแรงคู่ควบที่เท่ากันหมายถึง โมเมนต์ที่เกิดจากแรงคู่ควบสองแรงโดยแรงคู่ควบทั้งสองอาจจะกระทำที่ตำแหน่งต่างกันหรือมีขนาดต่างกันแต่ทำให้เกิดผลลัพธ์เป็นโมเมนต์ที่เท่ากัน จากรูปที่ 4.9 สามารถสรุปว่าเมื่อวัตถุแรงกระทำแรงที่กระทำอาจมีขนาดและทิศทางแตกต่างกันไปแต่แรงเหล่านี้ส่งผลให้เกิดโมเมนต์ที่เท่ากัน



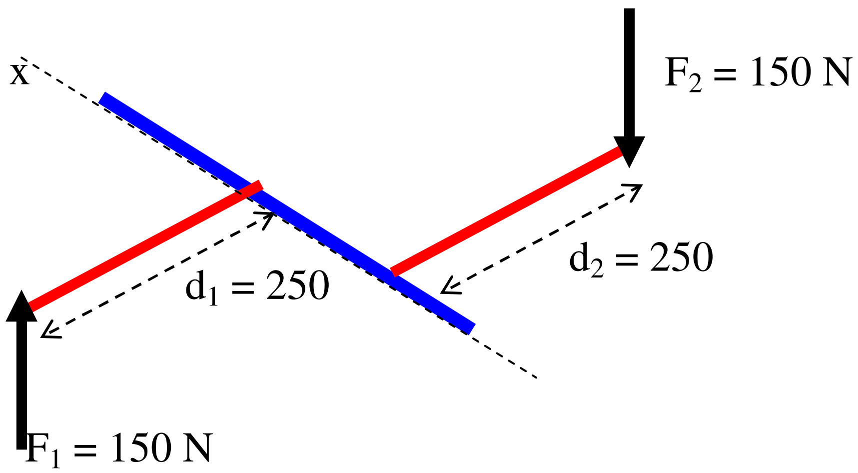
รูปที่ 4.9 โมเมนต์ของแรงคู่ควบ

ตัวอย่างที่ 3 จากรูปจงหาโมเมนต์ของแรงคู่ควบที่เกิดจากการขันประแจทั้งสองตัวรอบแกน x และแกน y



วิธีทำ

โมเมนต์ของแรงคู่ควบรอบแกน x



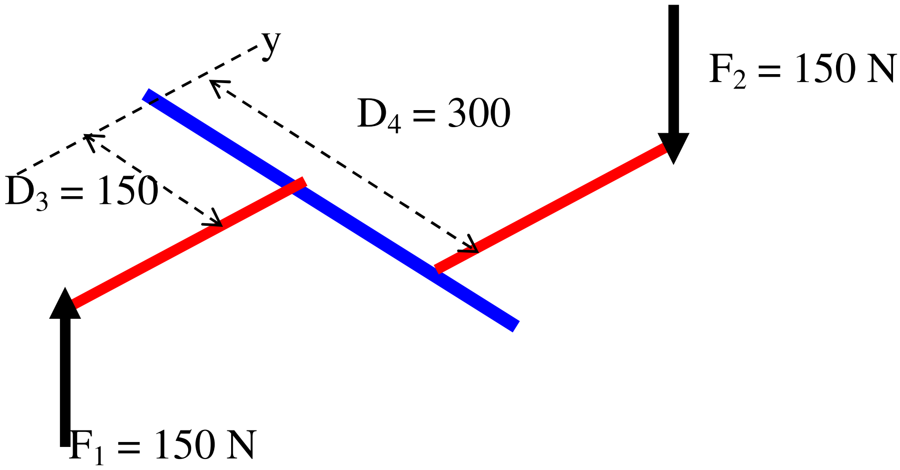
$$M_x = -F_1 \times d_1 - F_2 \times d_2$$ ทิศทวนเข็มนาฬิกา +

$$= -150 \times 250 - 150 \times 250$$

$M_x = -75000$ N.mm.

$M_x = 75000$ N.mm.

โมเมนต์ของแรงคู่ควบรอบแกน y



$M_y = F_1 \times d_3 - F_2 \times d_4$ ทิศทวนเข็มนาฬิกา +

$= 150 \times 150 - 150 \times 300$

$M_y = -22500$ N.mm.

$M_y = 22500$ N.mm.

บทที่ 5

แรงในสภาวะสมดุล

5.1 บทนำ

สภาพสมดุลเป็นสภาพที่วัตถุหยุดนิ่งหรือเคลื่อนที่ในทิศทางตรงด้วยความเร็วคงที่ จากกฎข้อที่สองของนิวตัน วัตถุจะอยู่ในสภาพสมดุลเมื่อผลรวมของทุกๆแรงและผลรวมของทุกๆ โมเมนต์เป็นศูนย์

5.2 วัตถุแข็งเกร็งในสภาพสมดุล

วัตถุแข็งเกร็งจะอยู่ในสภาพสมดุลเมื่อแรงภายนอกซึ่งกระทำต่อวัตถุแข็งเกร็งประกอบกันเป็นระบบแรงที่ปราศจากแรงลัพธ์และไม่มีแรงคู่ควบลัพธ์ จากเงื่อนไขดังกล่าวสามารถเขียนได้ดังนี้

ผลรวมของแรงในแนวแกน x มีค่าเท่ากับศูนย์ $\Sigma F_x = 0$

ผลรวมของแรงในแนวแกน y มีค่าเท่ากับศูนย์ $\Sigma F_y = 0$

ผลรวมของโมเมนต์มีค่าเท่ากับศูนย์ $\Sigma M_A = 0$

หากพิจารณาสมการโมเมนต์ เนื่องจากตำแหน่งจุด A อาจถูกเลือกแบบไม่เจาะจง สมการข้างบนจึงอาจกล่าวได้ว่า แรงภายนอกที่กระทำกับวัตถุแข็งเกร็งจะไม่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่และไม่ทำให้วัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบจุดใดๆ นั้นคือแรงภายนอกแต่ละแรงจะถูกหักล้างโดยการกระทำของแรงอื่นในระบบเราเรียกแรงภายนอกทั้งระบบที่มีสภาพดังกล่าวว่าเป็นระบบแรงที่อยู่ในสภาพสมดุล

5.3 แผนภาพวัตถุอิสระ

ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับสมดุลของวัตถุแข็งเกร็งจำเป็นต้องพิจารณาแรงทั้งหมดที่กระทำกับวัตถุดังนั้นเพื่อความสะดวกในการพิจารณาแรงในระบบจึงควรเขียนแผนภาพวัตถุอิสระของวัตถุแข็งเกร็งและแรงที่มากระทำ โดยเริ่มจากแยกชิ้นส่วนของวัตถุแข็งเกร็งออกจากที่รองรับหรือออกจากชิ้นส่วนอื่นๆที่ต่อเนื่องกันหรือต่อยึดกัน แล้วเขียนภาพร่างของวัตถุที่แยกออกมาพิจารณา โดยแสดงเพียงเส้นล้อมรูปก็พอจากนั้นก็แสดงแรงภายนอกทั้งหมดที่กระทำต่อวัตถุอิสระ แรงเหล่านี้รวมถึงแรงส่วนที่รองรับและแรงในชิ้นส่วนที่แยกออกไปโดยจุดที่กระทำอยู่ที่จุดรองรับหรือจุดที่ตัดแยกวัตถุ

ขนาดของแรงและแนวแรงที่เกิดจากแรงภายนอกที่ทราบค่าซึ่งกระทำกับวัตถุแข็งเกร็ง

Chapter 6
Virtual Work

6.1 Introduction

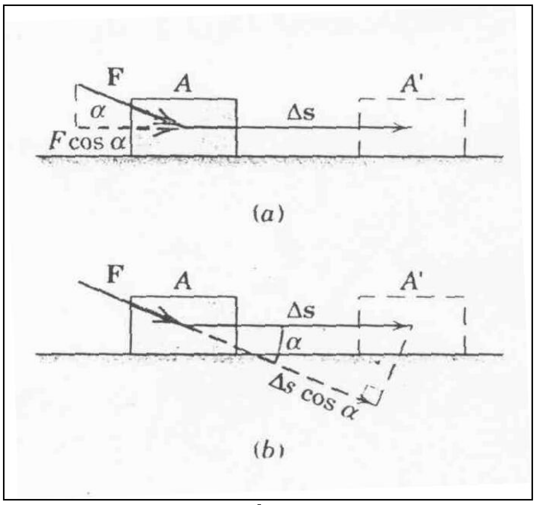
ในบทที่แล้วเราได้ทำการวิเคราะห์สภาพสมดุลย์ของวัตถุ โดยเขียนให้อยู่ในรูป free body diagram และใช้สมการ $\Sigma\overline{\mathrm{F}}$ และ $\Sigma\overline{\mathrm{M}} = 0$ และเราหาค่าแรงภายนอก หรือตัวแบ่งไม่ทราบค่าได้ จากสมการข้างต้น นอกจากนั้นวิธีการหาค่าดังกล่าวยังสามารถหาค่าโดยวิธีของงาน (work) เข้ามาช่วย หรือเรียกว่า method of virtual work (งานเสมือน)

6.2 Work (งาน)

6.2.1 <u>งานเนื่องจากแรง</u> (Work of a force) พิจารณาแรงคงที่ $\overline{\mathrm{F}}$ ที่กระทำบนวัตถุ ดังรูป 6.1 (a) ซึ่งเคลื่อนที่ไปตามระนาบจากจุด A ถึง A′ โดยแทนในรูปของเวกเตอร์ ΔS เราเรียกว่า การขจัด (displacement) ของวัตถุ โดยนิยามแล้วงาน (W) ที่ทำโดยแรง $\overline{\mathrm{F}}$ ต้องมีทิศทางเดียวกับการขจัด ดังนี้

$$W = (F\cos\alpha)\,\Delta S \tag{6.1}$$

หรือ $W = F(\Delta S\cos\alpha)$ **(6.2)**



รูปที่ 6.1

ผลลัพธ์ที่ได้จากทั้ง 2 สมการ จะมีค่าเท่ากันโดยงาน (W) จะเป็นปริมาณสเกลาร์ ซึ่งเขียนใหม่ เป็น

$$W = \bar{F} \cdot \bar{r} \qquad \textbf{(6.3)}$$

รูป 6.1 (a) แสดงถึงแรง ๆ หนึ่งกระทำบนวัตถุใด ๆ ที่จุด A ซึ่งทำให้วัตถุนั้น ๆ เคลื่อนที่ไปตามเส้นทางจากจุด A_1 ถึง A_2 โดยจุด A ถูกแสดงตำแหน่งด้วย เวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\bar{r}$ ซึ่งวัดจากจุด origin O และการขจัดน้อยมากในการเคลื่อนที่จาก A ไปยัง A′ โดยมีค่าการเปลี่ยนแปลงเท่ากับ dr ดังนั้น งานที่ทำโดยแรง $\bar{F}$ ระหว่างการขจัด $d\bar{r}$ จึงถูกนิยามด้วย

$$dW = \bar{F} \, . \, d\bar{r} \qquad \textbf{(6.4)}$$

หรือ $dW = F \, ds \cos \alpha$

ซึ่งแสดงดังรูป 6.1 (b) โดยองค์ประกอบของแรงจะอยู่ในทิศทางเดียวกับการขจัด
ถ้าเราแทน $\bar{F}$ และ $d\bar{r}$ ในเทอมของององค์ประกอบแบบ rectangular เราจะได้

$$dW = (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_Z \hat{k}) \, . \, (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k})$$
$$= F_x \, dx + F_y dy + F_Z \, d_Z$$

ดังนั้นถ้าระยะของการเคลื่อนที่จากจุด A_1 ถึง A_2 ค่าพลังงานทั้งหมดมีค่า

$$W = \int \bar{F} \, . \, d\bar{r} = \int (F_x \, dx + f_y dy + F_Z dz) \qquad \textbf{(6.5)}$$

หรือ $W = \int F \cos\alpha \, ds$ **(6.6)**

6.2.2 <u>งานที่เกิดจากแรงคู่ควบ</u> (Work of a Couple)

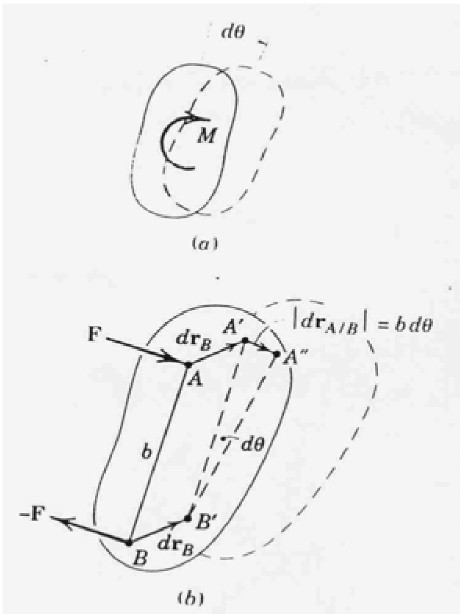
นอกจากงานที่เกิดจากแรงแล้ว ยังมีงานที่เกิดจากแรงคู่ควบ (Couple) รูป 6.2 (a) แสดงถึงแรงคู่ควบ M ที่กระทำบนวัตถุ ทำให้มีการเปลี่ยนแปลงเชิงมุมมีค่าเท่ากับ $d\theta$ งานที่ทำโดยแรงคู่ควบจะหาได้จากการรวมกันของงานซึ่งเกิดจากแรง 2 แรงซึ่งเป็นตัวทำให้เกิดแรงคู่ควบจากรูป 6.2(b)เราแทนแรงคู่ควบซึ่งเกิดจากแรง 2 แรงซึ่งมีขนาดเท่ากัน แต่ทิศทางตรงกันข้าม ด้วย $\overline{F}$ และ $-\overline{F}$ ซึ่งกระทำที่จุด A และจุด B ดังนั้น $\overline{F} = \frac{\overline{M}}{b}$ หรือ

$\overline{M} = \overline{F}b$ ดังนั้น งานที่ทำมีค่า

$$dW = M\,d\theta \qquad \textbf{(6.7)}$$

ดังนั้น งานทั้งหมดของแรงคู่ควบมีค่าเท่ากับ

$$W = \int M\,d\theta \qquad \textbf{(6.8)}$$



รูป 6.2

6.2.3 <u>งานเสมือน</u> (Virtual Work)

เราพิจารณาอนุภาคหนึ่ง ๆ ซึ่งอยู่ในตำแหน่งสมดุลย์ โดยหาค่าจากแรงซึ่งกระทำบนอนุภาคนั้น ๆ โดยสมมติว่าการขจัดน้อย ๆ δr อยู่ห่างจากตำแหน่งตามธรรมชาติและคงที่ด้วยเงื่อนไขของระบบที่เรียกว่า การขจัดเสมือน (virtual displacement) ดังนั้นคำว่าเสมือน (virtual) จึงถูกนำมาใช้เพื่อที่จะชี้ว่าการขจัดไม่ได้มีอยู่จริง แต่ถูกสมมติขึ้นโดยเปรียบเทียบกับ

ตำแหน่งสมดุลย์ ดังนั้น งานที่ทำโดยแรง F บนอนุภาคระหว่างการขจัดเสมือน δr จึงถูกเรียกว่า งานเสมือน (virtual work) มีค่าเป็น

$$\delta W = \bar{F} . \delta\bar{r} \quad \text{หรือ} \quad \delta W = F\,\delta S \cos\alpha$$

โดย α เป็นมุมระหว่าง $\bar{F}$ และ $\delta\bar{r}$ และ

δS เป็นขนาดของ $\delta\bar{r}$

ความแตกต่างระหว่าง $\delta\bar{r}$ และ $d\bar{r}$ หมายถึงการเปลี่ยนแปลงน้อย ๆ ในการเคลื่อนที่จริง และสามารถหาการขจัดได้โดยการ integration แต่ $\delta\bar{r}$ หมายถึง การเสมือนในช่วงสั้น ๆ หรือ การเคลื่อนที่สมมติ และไม่สามารถ integrate ได้

นอกจากนั้น การขจัดเสมือนอาจจะหมายรวมถึงการหมุนของวัตถุ $\delta\theta$ ดังนั้นงานที่ทำโดยแรงคู่ควบมีค่าเท่ากับ

$$\delta W = \bar{M}\,\delta\theta$$

6.3 สภาพสมดุลย์ (Equilibrium)

เราสามารถแทนเงื่อนไขของสภาพสมดุลย์ในเทอมของงานเสมือนในรูปของอนุภาค วัตถุแข็งเกร็ง และระบบที่เชื่อมต่อกับวัตถุแข็งเกร็ง ดังนี้

(a) อนุภาค

$$\delta W = \bar{F}_1 . \delta\bar{r} + \bar{F}_2 . \delta\bar{r} + \bar{F}_3 . \delta\bar{r} + \ldots = \Sigma F\,\delta r$$

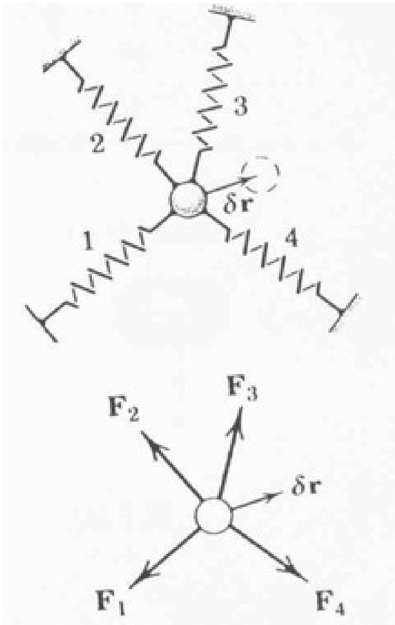
หรือ $\delta W = \Sigma\bar{F} . \delta\bar{r} = (\hat{i}\sum F_x + \hat{j}\sum F_y + \hat{k}\sum F_z) . (\hat{i}\,\delta x + \hat{j}\,\delta y + \hat{k}\,\delta z)$

$$= \Sigma F_X\,\delta x + \Sigma F_y\,\delta y + \Sigma F_Z\,\delta z$$

(b) วัตถุแข็งเกร็ง ผลรวมของระบบมีค่าเท่ากับศูนย์

(c) ระบบที่เชื่อมต่อกับวัตถุแข็งเกร็ง

$$\delta W = 0$$



ซึ่งหมายความว่างานเสมือนที่กระทำโดยแรงภายนอกบนระบบที่สมดุลย์จะมีค่าเท่ากับศูนย์ โดยหลักการของงานเสมือนสำหรับสภาวะสมดุลย์จะไม่ใช้กับวัตถุเพียงอันเดียว แต่จะใช้กับระบวัตถุที่มีวัตถุหลาย ๆ อันเชื่อมต่อกัน โดยแรงที่ทำให้เกิดงานเสมือนจะเป็นแรงประเภทแรงกระทำเท่านั้น ส่วนแรงปฏิกิริยาและแรงภายในจะไม่ทำให้เกิดงานเสมือน

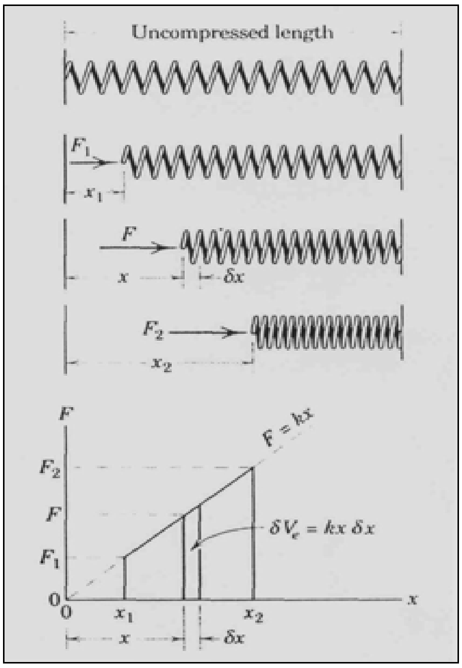
6.4 Potential energy and Stability

กรณีที่ระบบที่มีชิ้นส่วนสามารถยืดหดได้ งานที่กระทำต่อชิ้นส่วนที่ยืดหดได้จะถูกเก็บไว้ในชิ้นส่วนประกอบในรูปของพลังงานศักย์เนื่องจากการยืดและหดตัว ถ้าชิ้นส่วนที่ยืดหดได้นั้นอยู่ในรูปของสปริง และแรงที่กระทำต่อสปริงเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะยืดและหดเท่ากับ x โดยที่ $\bar{F} = k\bar{x}$ ดังนั้นพลังงานศักย์ของสปริงมีค่าเท่ากับ

$$W_e = \int_0^x F\,dx = \int_0^x kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \textbf{(6.9)}$$

ขณะที่มีการยืดและหดตัวของสปริง จาก x_1 ถึง x_2 งานที่ทำ โดยสปริงมีค่าเท่ากับการเปลี่ยนแปลงของพลังงานศักย์ยืดหยุ่น ดังรูป (6.3)

$$\Delta W_e = \int_{0_1}^{x_2} kx\,dx = \frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right) \qquad \textbf{(6.10)}$$



รูป (6.3)

ในขณะที่เกิดการขจัดเสมือนของสปริง δx งานเสมือนบนสปริงจะมีค่าเท่ากับการเปลี่ยนแปลงของพลังงานศักย์ยืดหยุ่น

$$\delta W_e = F \quad \delta_x \quad = \quad kx \quad \delta x \qquad \textbf{(6.11)}$$

กรณีที่มีการอัดของสปริง แล้วปล่อยจาก x_2 ไป x_1 การเปลี่ยนแปลงของพนักงานศักย์ของสปริงจะมีค่าติดลบ ทำให้ δx มีค่าเป็นลบ รวมทั้ง δW_e ก็มีค่าติติดลบ เช่นเดียวกัน

จากรูป (6.4) งานเสมือนเนื่องจากน้ำหนัก เป็นการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ เนื่องจากตำแหน่ง (δW_g) โดยพลังงานศักย์เนื่องจากตำแหน่ง (W_g) มีค่าเท่ากับ

$$W_g \quad = \quad mgh \qquad \textbf{(6.12)}$$

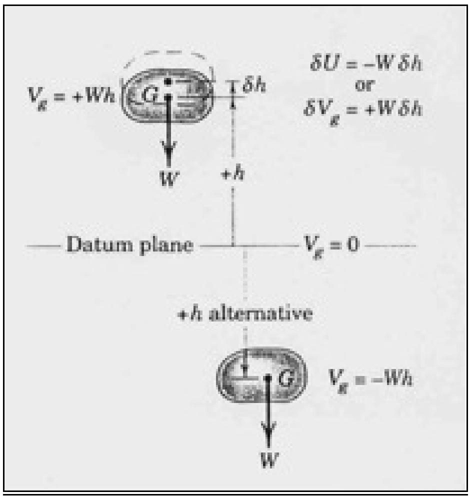
การเปลี่ยนแปลงเสมือนของพนักงานศักย์เนื่องจากตำแหน่งจะมีค่าเป็น

$$\delta W_g \quad = \quad mg \quad \delta h \qquad \textbf{(6.13)}$$

δh เป็นการเปลี่ยนตำแหน่งเสมือนในแนวดิ่งของจุดศูนย์กลางมวล

ดังนั้น การเปลี่ยนแปลงเสมือนของสภาวะสมดุลย์ มีค่าเท่ากับ

$$\delta U = \delta W_e + \delta W_g \quad = \quad \delta V \qquad \textbf{(6.14)}$$



รูป 6.4

<u>การพิจารณาตำแหน่งสมดุลย์และความมั่นคงในระบบ (Stability)</u>

ถ้าไม่มีแรงใด ๆ มากระทบกับระบบ ยกเว้นแรงเนื่องจากน้ำหนัก สมการของงานเสมือนในสมการที่ **(6.14)**จะเขียนได้เป็น

$$\delta V = 0 \qquad \textbf{(6.15)}$$

และถ้าพิจารณาในรูปของตัวแปรที่กำหนดตำแหน่ง (x) ดังนั้น

$$\frac{dV}{dx} = 0 \qquad \textbf{(6.16)}$$

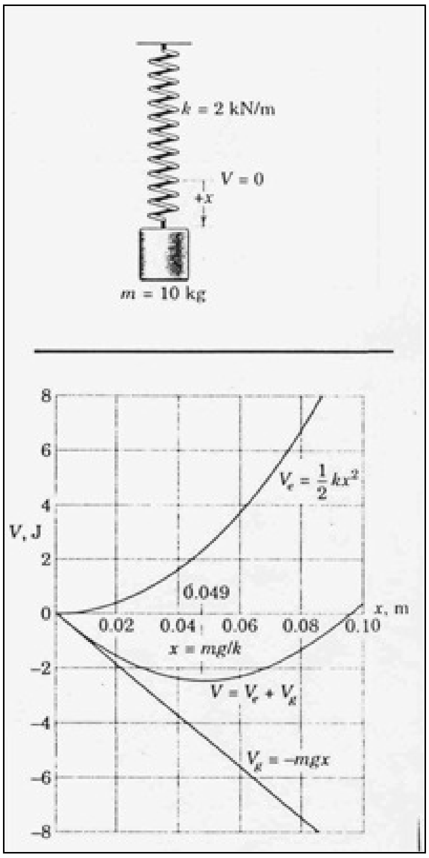
ซึ่งแสดงว่า ถ้า $\frac{d^2V}{dx^2} > 0$ ตำแหน่งจะมีความมั่นคง

ถ้า $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$ ตำแหน่งสมดุลย์จะไม่มั่นคง

และ $\frac{d^2V}{dx^2} = 0$ สมดุลย์จะเป็นกลาง

รูปที่ (6.5) แสดงความมั่นคงในระบบ

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ทรงกระบอกมวล 10 kg ถูกยืดออกโดยสปริง ซึ่งมีความเหนียว (Stiffness) เท่ากับ 2 KN/m จง plot ถ้าพลังงานศักย์ V ของระบบ และแสดงค่าตำแหน่งที่สมดุลย์ที่ต่ำที่สุดของระบบ



<u>Solution</u>

$$V = V_e + V_g$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 - mgx$$

เมื่อระบบอยู่ในสมดุลย์ $\frac{dv}{dx} = 0$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dx} = kx - mg = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{mg}{k}$$

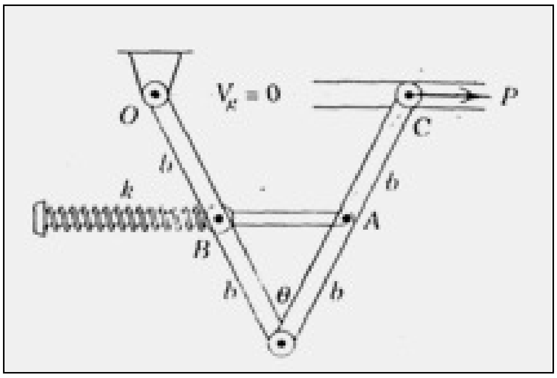
$$\frac{d^2v}{dx} = k$$

$\therefore$ ค่า k เป็นบวก ดังนั้น แสดงว่าเป็นจุดต่ำสุด

$$\therefore \quad x = \frac{mg}{k} = \frac{10(9.81)}{2000}$$

$$= 0.0490 \text{ m} \text{ หรือ } 49.0 \text{ mm}$$

ตัวอย่างที่ 2 The two uniform links, each of mass m, are in the vertical plane and are connected and constrained as shown. As the angle θ between the links increases with the application of the horizontal force P, the light rod, which is connected at A and passes through a pivoted collar at B, compresses the spring of stiffness k. If the spring is uncompressed in the position where θ = O, determine the force P which will produce equilibrium at the angle θ.



Solution $x = 2b \sin \frac{\theta}{2}$

$\therefore$ พลังงานศักย์ยืดหยุ่นของสปริงมีค่าเท่ากับ

$$[V_e = \tfrac{1}{2}kx^2]; \quad V_e = \tfrac{1}{2}k\left(2b \sin \frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$= 2kb^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

ให้จุด O เป็น reference ดังนั้นพลังงานศักย์ เนื่องจากแรงโน้มถ่วงมีค่าเท่ากับ

$$[V_g = mgh]; \quad V_g = 2mg\left(-b\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

ระยะทางระหว่าง 0 และ C มีค่าเท่ากับ $4\ b\sin\frac{\theta}{2}$ ดังนั้น

งานเสมือนซึ่งเกิดจากแรง P มีค่าเท่ากับ

$$\delta u' = P\,\delta\,(4\ b\sin\frac{\theta}{2}) = 2\,P\,b\cos\frac{\theta}{2}\delta\theta$$

$\therefore$ สมการของ virtual work มีค่า

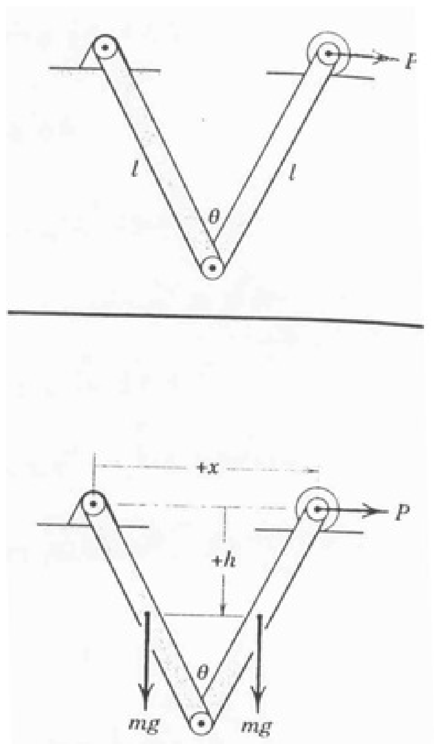
$$[\delta u' = \delta V_e + \delta V_g]$$

$$2\,Pb\cos\frac{\theta}{2}\delta\theta = \delta\,(2\,kb^2\sin^2\frac{\theta}{2}) + \delta\,(-2\,mgb\cos\frac{\theta}{2})$$

$$= 2kb^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\delta\theta + mgb\sin\frac{\theta}{2}\delta\theta$$

$$\therefore \quad p = kb\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}mg\tan\frac{\theta}{2}$$ #

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> Each of the two uniform hinged bars has a mass m and a length ℓ, and is supported and loaded as shown. For a given force P determine the angle θ for the equilibrium.



<u>Solution</u> $[\delta u = 0]$ $P\delta x + 2\,mg\delta h = 0$ **(1)**

จากรูป $\frac{x}{2} = \ell \sin\frac{\theta}{2}$ หรือ $x = 2\,\ell \sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore\ \delta x = \ell \cos\frac{\theta}{2}\delta\theta$

ดังนั้น $h = \frac{\ell}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ และ $\delta h = -\frac{\ell}{4}\sin\frac{\theta}{2}\delta\theta$

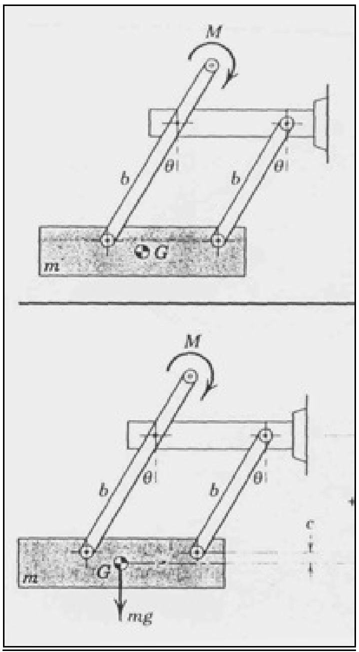
แทนค่าลงในสมการ virtual work **(1)** ดังนั้น

$$P\,\ell\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta - 2mg\frac{\ell}{4}\sin\frac{\theta}{2}\delta\theta = 0$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{2P}{mg} \quad \text{หรือ} \quad \theta = 2\tan^{-1}\frac{2P}{mg}$$

<u>**Ans**</u>.

<u>ตัวอย่างที่</u> 4 The mass m is brought to an equilibrium position by the application of the couple M to the end of one of the two parallel links which are hinged as shown. The links have negligible mass, and all friction is assumed to be absent. Determine the expression for the equilibrium angle θ assumed by the links with the vertical for a given value of M. Consider the alternative of a solution by force and moment equilibrium.



Solution น้ำหนัก mg กระทำกับวัตถุโดยผ่านจุดศูนย์กลางมวลที่ G และแรงคู่ควบ M กระทำที่ปลายของ link และไม่มีแรงภายนอกและแรงคู่ควบใด ๆ กระทำให้เกิดงานบนระบบระหว่างที่มุม θ มีการเปลี่ยนแปลง

ดังนั้น ตำแหน่งในแนวดิ่งของจุดศูนย์กลางมวล G จึงถูกออกแบบให้มีระยะทางต่ำกว่าจุด reference เท่ากับ h โดย $h = b\cos\theta + C$ ดังนั้น งานที่กระทำโดย mg ระหว่างการเคลื่อนที่ δh ในทิศทางของ mg คือ

$$mg\delta h = mg\ \delta(b\cos\theta + c)$$
$$= mg(-b\sin\delta\theta + 0)$$
$$= -mg\,b\sin\theta\,\delta\theta$$

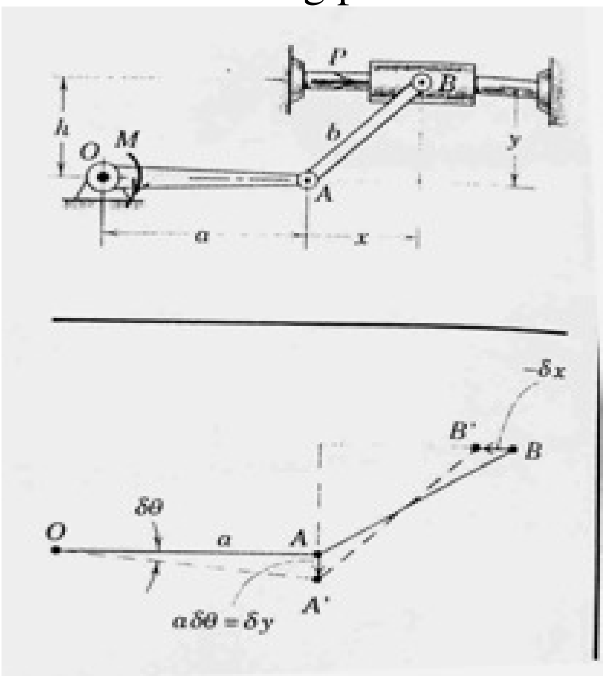
เครื่องหมายลบแสดงว่างานมีค่าเป็นลบกรณีที่ $\delta\theta$ เป็นบวก ค่าคงที่ C อาจจะลดลงจนมีค่าเป็นศูนย์ ปกติแล้วค่า θ ที่วัดได้จะมีค่าเป็นบวกในทิศทวนเข็มนาฬิกา เพราะฉะนั้น $\delta\theta$ จะมีค่าเป็นบวกในทิศทวนเข็มนาฬิกาเช่นกัน ดังนั้นงานที่ทำโดยแรงคู่ควบ M ในทิศทวนเข็มนาฬิกา จะมีค่าเป็นบวกเช่นเดียวกัน คือ $+M\delta\theta$

จาก $\delta u = 0 \quad M\delta\theta + mg\,\delta h = 0$

$$M\delta\theta = mg\, b \sin\theta\ \delta\theta$$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{M}{mgb}$$ **Ans.**

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> For the link OA in the horizontal position shown, determine the force P on the sliding collar which will prevent OA from rotating under the action of the couple M. Neglect the mass of the moving ports.



<u>Solution</u> จากรูป ถ้าแรง P ไม่กระทำที่ B ปรอท B จะเคลื่อนที่กลับดังรูปข้างล่าง ทำให้ OA หมุนไปเป็นมุม $\delta\theta$ และการขจัดในแนว y เป็น $a\delta\theta$ และจุด B เคลื่อนที่ไม่ยังจุด B′ เท่ากับ $-\delta x$

<u>พิจารณารูป</u> ที่ Δ ด้านขวาที่ต่อกับ limk AB ได้

ความสัมพันธ์ว่า

$$x^2+y^2 = b^2$$

Differential above this equation จะได้

$$2x\delta x = -2y\delta y + 0$$

$$\delta x = -\frac{y}{x}\delta y$$

$$= -\frac{y}{x} \quad (a \delta\theta)$$

จาก virtual work equation

$[\delta u = 0]$ $M\delta\theta + P\delta x = 0$

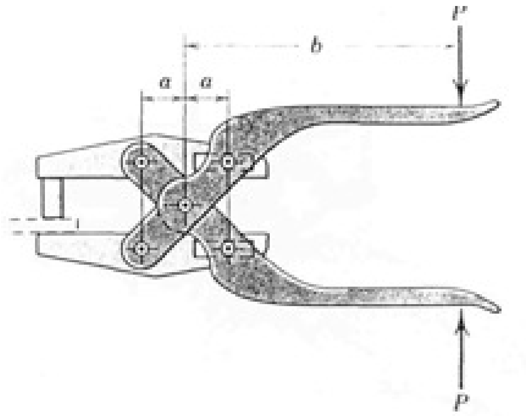
$$M\delta\theta + P\left(-\frac{y}{x}a\,\delta\theta\right) = 0$$

$$P = \frac{mx}{ya} = \frac{mx}{ha}$$

Ans.

ตัวอย่างที่ 6 Find the force Q exerted on the paper by the paper punch as shown an fig.

Solution จาก $\delta u = 0$



การเปลี่ยนตำแหน่งเสมือนของด้ามจับ

ตามแนวแรง มีค่า $P = \delta x$ การเปลี่ยน

ตำแหน่งเสมือนของปากคีบตามแนวแรงมีค่า

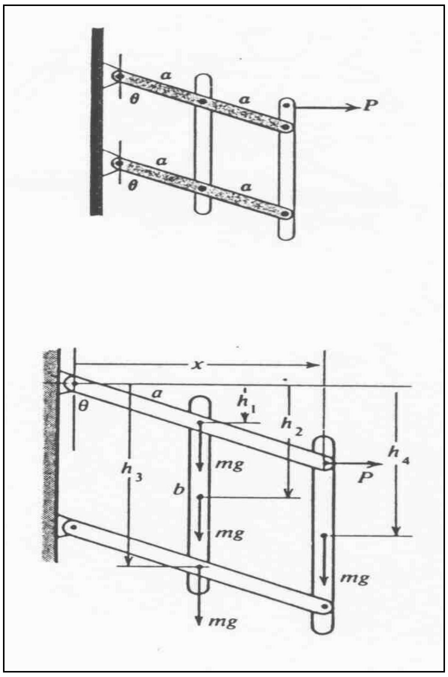
$Q = \frac{a}{b}\delta x$

$[\delta u = 0]$; $\quad -P\delta x + Q\frac{a}{b}\delta x$

$= 0$

$$Q = \frac{b}{a}P$$ **<u>Ans</u>.**

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> ด้านข้อต่อขนาดสม่ำเสมอ 4 อัน แต่ละอันมีมวล m จงหาแรง P ที่กระทำในแนวระดับ เพื่อรักษาตำแหน่งของระบบไว้ในระนาบตั้งตามรูป



<u>Solution</u> จาก $\delta u = 0$

<u>Consider</u> $h_1 = a\cos\theta$, $\delta h_1 = -a\sin\theta\,\delta\theta$

$h_2 = a\cos\theta + \frac{b}{2}$, $\delta h_2 = -a\sin\theta\,\delta\theta$

$h_3 = a\cos\theta + b$, $\delta h_3 = -a\sin\theta\,\delta\theta$

$h_4 = 2a\cos\theta + \frac{b}{2}$, $\delta h_4 = -2a\sin\theta\,\delta\theta$

$x = 2a\sin\theta$, $\delta x = 2a\cos\theta\,\delta\theta$

จาก $[\delta u = 0]$

$$mg\delta h_1 + mg\delta h_2 + mg\delta h_3 + mg h_4 + P\delta x = 0$$

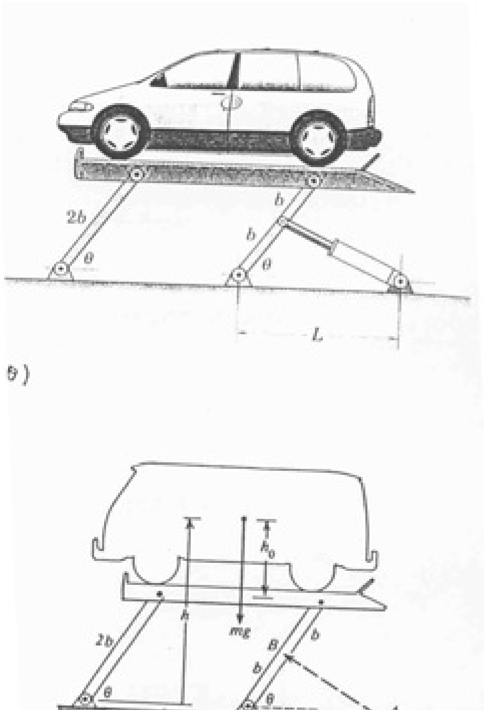
$$-3mg\ a \sin\theta\ \delta\theta - 2mg\ a \sin\theta\ \delta\theta + 2P\ a\cos\theta\ \delta\theta = 0$$

$$2P\ a\cos\theta\ \delta\theta = 5\ mg\ a\sin\theta\ \delta\theta$$

$$P = \frac{5}{3}\ mg\ \tan\theta$$

Ans.

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> จงแสดงแรงกด C ในกระบอกไฮโดรลิกที่ใช้สำหรับยกแท่นรถยกในเทอมของ θ สำหรับมวลของก้านต่อต่าง ๆ จะไม่นำมาพิจารณา จะพิจารณาเฉพาะมวลของรถเท่านั้น



<u>Solution</u> การเปลี่ยนตำแหน่งเสมือนในแนวของแรง C เท่ากับ $\delta\ell$ การเปลี่ยนตำแหน่งเสมือนในแนวของแรง mg เท่ากับ δh

จากรูป กระบอกไฮโดรลิกยาว ℓ

$$\therefore\ \ell^2 = (b\sin\theta)^2 + (L - b\cos\theta)^2$$

$\delta\theta$, $2\ell\delta\ell = 2b\sin\theta\cos\theta\ \delta\theta + 2(L - b\cos\theta\ \delta\theta)$

$$= 2Lb\sin\theta\ \delta\theta$$

$$\delta\ell = \frac{Lb}{\ell}\sin\theta\ \delta\theta$$

และ $h = 2b\sin\theta + h_0$

$$\delta h = 2b\cos\theta\ \delta\theta$$

จาก$[\delta u = 0]$; $C\delta\ell - mg\delta h = 0$

$$C\left[\frac{Lb}{\ell}\sin\theta\ \delta\theta\right] - mg\,(2b\cos\theta\ \delta\theta) = 0$$

$$C = 2mg\,\frac{\ell}{L}\cot\theta$$

$$= \frac{2mg}{L}\sqrt{(b\sin\theta)^2 + (L - b\cos\theta)^2}\quad \cot\theta$$

$$C = 2mg\cot\theta\ \sqrt{1 + \left(\frac{b}{L}\right)^2 - 2\frac{b}{L}\cos\theta}$$

Ans.